

TD1 : Transmission de l'Information L3
Les lignes de transmission en régime harmonique
Diagramme de Smith

Exercice 1 : impédance ramenée et ondes stationnaires

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique R_c , alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge d'impédance Z_t , on désignera par " l " l'abscisse courante, l'origine étant sur la terminaison.

- 1) En rappelant les équations générales des lignes sans pertes (expressions des tensions et courants le long de la ligne), exprimer $Z(l)$, impédance "ramenée" par la ligne à l'abscisse l , en fonction de R_c , Z_t et l . β
- 2) Examiner les cas particuliers pour lesquels Z_t vaut 0 (court-circuit) et ∞ (circuit ouvert) : quelle remarque peut-on faire sur ces valeurs particulières de $Z(l)$? En fonction de la valeur de l , quels sont les dipôles équivalents obtenus ?

Exercice 2 : Mesures sur une ligne

On considère une ligne sans pertes réalisée par deux conducteurs en cuivre isolés au plastique et torsadés, de résistance caractéristique $R_c = 100 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de fréquence 250 MHz, de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge de résistance R_t réelle.

- 1) En déplaçant un voltmètre branché en dérivation sur la ligne, on constate que l'écart entre deux minima consécutifs de tension vaut 20 cm. En déduire la vitesse de propagation sur la ligne ainsi que le coefficient diélectrique du plastique utilisé pour l'isolant.
- 2) Cette même mesure révèle un ROS égal à 3. En déduire alors la valeur de la charge R_t .
- 3) On insère un tronçon de ligne de longueur $\lambda/4$ ("tronçon quart d'onde") entre le bout de la ligne précédente et la charge R_t . Montrer qu'il est possible de choisir la résistance caractéristique R_o de ce tronçon de telle façon que l'impédance d'entrée de l'ensemble [tronçon quart d'onde + charge] vaille R_c .

Exercice 3 : propriété de l'Abaque de SMITH

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique $R_c = 50 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge d'impédance $Z_t = (30 - j55) \Omega$, on désignera par " l " l'abscisse courante, l'origine étant sur la terminaison. La longueur d'onde mesurée vaut $\lambda = 8$ cm.

- 1) Déterminer le rapport d'onde stationnaire et le coefficient de réflexion.
- 2) Déterminer l'impédance ramenée à 11 cm de la charge.
- 3) Déterminer la position des maxima et minima de tension sur la ligne ainsi que la valeur de l'impédance en ces points.

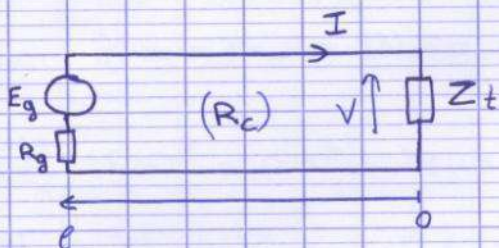
Exercice 4 : propriété de l'Abaque de SMITH

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique $R_c = 50 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une impédance inconnue Z_t . On mesure un $ROS = 2,7$ et la position du premier minimum de tension à partir de la charge est $x_m = 34,8 \text{ cm}$. La longueur d'onde mesurée vaut $\lambda = 1 \text{ m}$, la longueur de la ligne est $l = 1,45 \text{ m}$.

- 1) Déterminer la valeur de l'impédance de la charge.
- 2) Déterminer l'impédance d'entrée de la ligne.

Canaux de transmission TD n°1

Ex.1: impédance ramenée et ondes stationnaires



$$V(l) = A \cdot e^{j\beta l} + B \cdot e^{-j\beta l}$$

$$V(l, t) = \text{Re} [V(l) e^{j\omega t}]$$

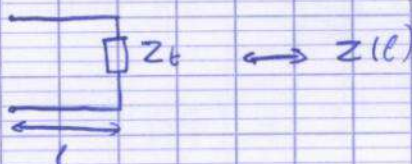
$$I(l) = \frac{1}{R_c} [A e^{j\beta l} - B e^{-j\beta l}]$$

Ligne sans perte: $R_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$ résistance caractéristique de la ligne.

$$\beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)}$$



Rq: $Z(0) = Z_t = \frac{A+B}{A-B} \cdot R_c = \frac{1+B/A}{1-B/A} \cdot R_c$

$$Z(l) = \left(\frac{A \cdot e^{j\beta l} + B \cdot e^{-j\beta l}}{A e^{j\beta l} - B \cdot e^{-j\beta l}} \right) \times R_c \quad \text{en fonction de } Z_t, R_c, \beta, l$$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} + \frac{B}{A} \cdot e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{B}{A} \cdot e^{-j\beta l}}$$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} (Z_t + R_c) + (Z_t - R_c) e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} (Z_t + R_c) - (Z_t - R_c) e^{-j\beta l}}$$

$$= R_c \frac{(Z_t + R_c)(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) + (Z_t - R_c)(\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))}{(Z_t + R_c)(\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) - (Z_t - R_c)(\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))}$$

$$= R_c \cdot \frac{j Z_t \cos(\beta l) + j R_c \sin(\beta l)}{j R_c \cos(\beta l) + j Z_t \sin(\beta l)}$$

Or $\frac{B}{A} = \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} = \Gamma$

$$Z(l) = R_c \cdot \frac{e^{j\beta l} + \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} e^{-j\beta l}}$$

$$Z(l) = \frac{Z_t + j R_c \tan(\beta l)}{1 + j \frac{Z_t}{R_c} \tan(\beta l)} \quad \text{de période } \frac{\lambda}{2}$$

2) a) Si $Z_t = 0$, $Z_0(l) = jR_c \tan(\beta l) = jX$
 $\rightarrow$ court-circuit.

$Z(l)$ est imaginaire pur

$\Rightarrow$  $X > 0$, $Z_0(l)$ est une inductance

 $X < 0$, $Z_0(l)$ est une capacité

$$\beta l = \frac{2\pi l}{\lambda}$$

$$0 < \beta l < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < \frac{2\pi l}{\lambda} < \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0(l) > 0 \Leftrightarrow \text{Inductance} \Leftrightarrow 0 < l < \frac{\lambda}{4} \quad (0 < \beta l < \frac{\pi}{2})$$

$$Z_0(l) < 0 \Leftrightarrow \text{Capacité} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$$

$$Z_0(0) = 0 \Leftrightarrow \text{court-circuit} (l=0)$$

$$Z_0\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \infty \Leftrightarrow \text{résistance} \quad \beta l = \frac{\pi}{2}$$

b) Si $Z_t = +\infty$ ^{terminaison de la ligne est un} (circuit ouvert) $Z_0(l) = -\frac{jR_c}{\tan(\beta l)} = -jR_c \cot(\beta l)$
 $(Z(l) \text{ imaginaire pur également})$

$$Z_0(0) = \infty \quad l=0$$

$$Z_0\left(\frac{\lambda}{4}\right) = 0 \quad l = \frac{\lambda}{4} \quad \beta l = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0(l) < 0 \Leftrightarrow \text{capacité} \Leftrightarrow 0 < l < \frac{\lambda}{4}$$

$$Z_0(l) > 0 \Leftrightarrow \text{inductance} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{4} < l < \frac{\lambda}{2}$$

Exercice 2: Mesure sur une ligne

- 1) Deux minima consécutifs de tension ont un écart de 20 cm $\Rightarrow \lambda = 40$ cm

vitesse de propagation: $v = \lambda f = 0,4 \cdot 2,5 \cdot 10^8 = 1 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Rappel: $\Gamma = \frac{B}{A} = \rho \cdot e^{j\varphi}$ $0 \leq \rho \leq 1$ car onde réfléchie - puissance que onde de départ

$$V(\ell) = A e^{j\beta \ell} + B e^{-j\beta \ell} = A e^{j\beta \ell} (1 + \Gamma e^{-2j\beta \ell})$$

$$|V(\ell)| = |A| |1 + \rho e^{j(\varphi - 2\beta \ell)}|$$

$$V_{\min} \leq |V(\ell)| \leq V_{\max}$$

$$|A| (1 - \rho) \leq |V(\ell)| \leq |A| (1 + \rho)$$

$$|V(\ell)| = V_{\min} \text{ quand } \varphi - 2\beta \ell = \pi - 2k\pi$$

$$\ell_n = \frac{\varphi_0}{2\pi} \lambda + \frac{k\lambda}{2}$$

2 minima de tension sont séparés par $\lambda/2$.

$$\Rightarrow \lambda = 2 \times 20 \text{ cm} = 0,4 \text{ m}$$

$$v = 1 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{3}$$

très vrai

$$\epsilon_r \mu_r = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = 9$$

$$\mu_r = 1 \Rightarrow \epsilon_r = 9$$

ϵ_r = permittivité diélectrique des isolants

μ_r = perméabilité magnétique des conducteurs

- 2) ROS: Rapport des ondes stationnaires

$$ROS = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

$$\text{ici } ROS = 3 \Leftrightarrow 1 + \rho = 3(1 - \rho) \Leftrightarrow 4\rho = 2 \Leftrightarrow \rho = \frac{1}{2}$$

$$\Gamma = \frac{Z_t - R_c}{Z_t + R_c} \quad Z_t = R_t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Gamma \text{ réel}$$

$$|\Gamma| = \rho \quad \Gamma \text{ est réel} \Rightarrow \Gamma = \rho \text{ ou } -\rho$$

$$\Gamma = \pm 1/2$$

$$\frac{R_t - R_c}{R_t + R_c} = \pm \frac{1}{2}$$

1^{er} cas : $\Gamma = 1/2$ $R_t - R_c = \frac{1}{2}(R_t + R_c)$

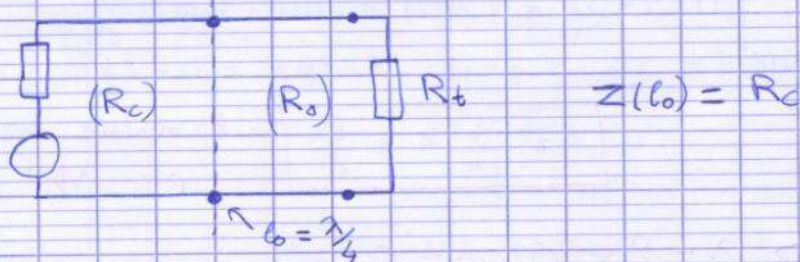
$$\frac{1}{2} R_t = \frac{3}{2} R_c \Rightarrow \boxed{R_t = 300 \, \Omega}$$

2^{ème} cas : $\Gamma = -1/2$ $R_t - R_c = -\frac{1}{2}(R_t + R_c)$

$$\frac{3}{2} R_t = \frac{1}{2} R_c \Rightarrow \boxed{R_t = 38,3 \, \Omega}$$

Rmq : Si $\Gamma = 1$, tte l'onde est réfléchie.

On veut $\Gamma = 0$, pour que la charge absorbe tte l'onde réfléchie.



On adapte la ligne en ayant $Z(l_0) = R_c$

$$Z(l_0) = \frac{R_t + j R_0 \tan(\beta l_0)}{R_0 + j R_t \tan(\beta l_0)} \cdot R_0$$

$$l_0 = \lambda/4 \quad \beta l_0 = \frac{\pi}{2} \quad \tan(\beta l_0) = +\infty$$

$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_0^2}{R_t}$$

On choisit $Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = R_c$ (pour avoir d'onde réfléchie)

$$\frac{R_0^2}{R_t} = R_c \quad R_0 = \sqrt{R_c R_t}$$

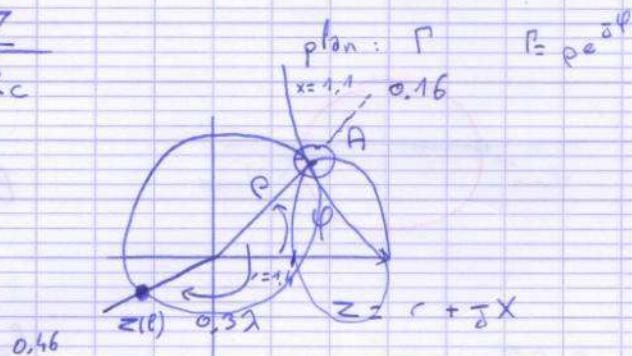
Exercice 3: Abaque de SMITH



$$Z = \frac{Z}{R_c}$$

Γ = coef. de réflexion

$$Z = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$



$$r = 1.4$$

$$x = 1.1$$

$$\begin{aligned} Z_t &= \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \\ \Gamma(l) &= \Gamma \cdot e^{-2\beta l} \\ Z(l) &= \frac{1 + \Gamma(l)}{1 - \Gamma(l)} \end{aligned}$$

Principe

On a $Z_t = 1.4 + j1.1$ sur l'abaque, on a $Z(l)$.

$$1) R_c = 50 \, \Omega \quad Z_t = (30 - j55) \, \Omega$$

$$z_t = \frac{Z_t}{R_c} = 0.6 - j1.1$$

$$\rho \approx 0.58 \quad ROS \approx 4$$

2) Trouver l'impédance ramenée à 11 cm de la charge

$$Z(l) = \quad l = 11 \text{ cm}$$

$$\lambda = 8 \text{ cm}$$

$$\frac{l}{\lambda} = 1.375$$

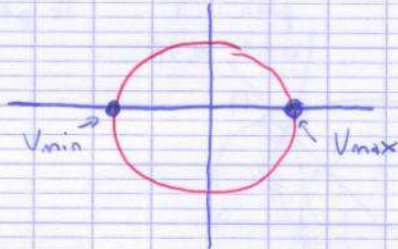
$$Z(l) = Z(0.375 \lambda)$$

car Z périodique en $\frac{\lambda}{2}$

$$\begin{aligned} &0.355 \\ &+ 0.375 \\ &\hline &0.730 \end{aligned} = 0.230 \text{ car périodique en } 0.5$$

$$\text{donc } Z(l) = 3.2 + 1.4 j \text{ pour } l = 11 \text{ cm.}$$

3) Pour trouver les minimums et maximums de tension :



$$Z_{\min} = 0,25$$

$$Z_{\max} = 4$$

$$l_{\min} = 0,145 \lambda + k \frac{\lambda}{2}$$

$$= 1,16 \text{ cm} + k \times 4 \text{ cm}$$

$$l_{\max} = 0,365 \lambda + k \frac{\lambda}{2}$$

$$= 3,16 \text{ cm} + k \times 4 \text{ cm}$$

Exercice 4 :

1) $\lambda = 1 \text{ m}$
 $x_n = 34,8 \text{ cm}$

$$\text{ROS} = \frac{1-p}{1+p} \quad (\text{ROS} \leftrightarrow p)$$

$$Z = \frac{Z_t}{R_c}$$

$$34,8 \text{ cm} = 0,348 \lambda$$

$$Z = 0,85 + 0,98 j$$

$$1\lambda = 1 \text{ m}$$

$$0,348\lambda = 34,8 \text{ cm}$$

(xR_c)

$$Z_t = 42,5 - 49 j$$

2) Longueur de la ligne: $l = 1,45 \text{ m}$

$$\frac{l}{\lambda} = 1,45$$

$$Z(l) = 1,45 Z - 1,45 j$$

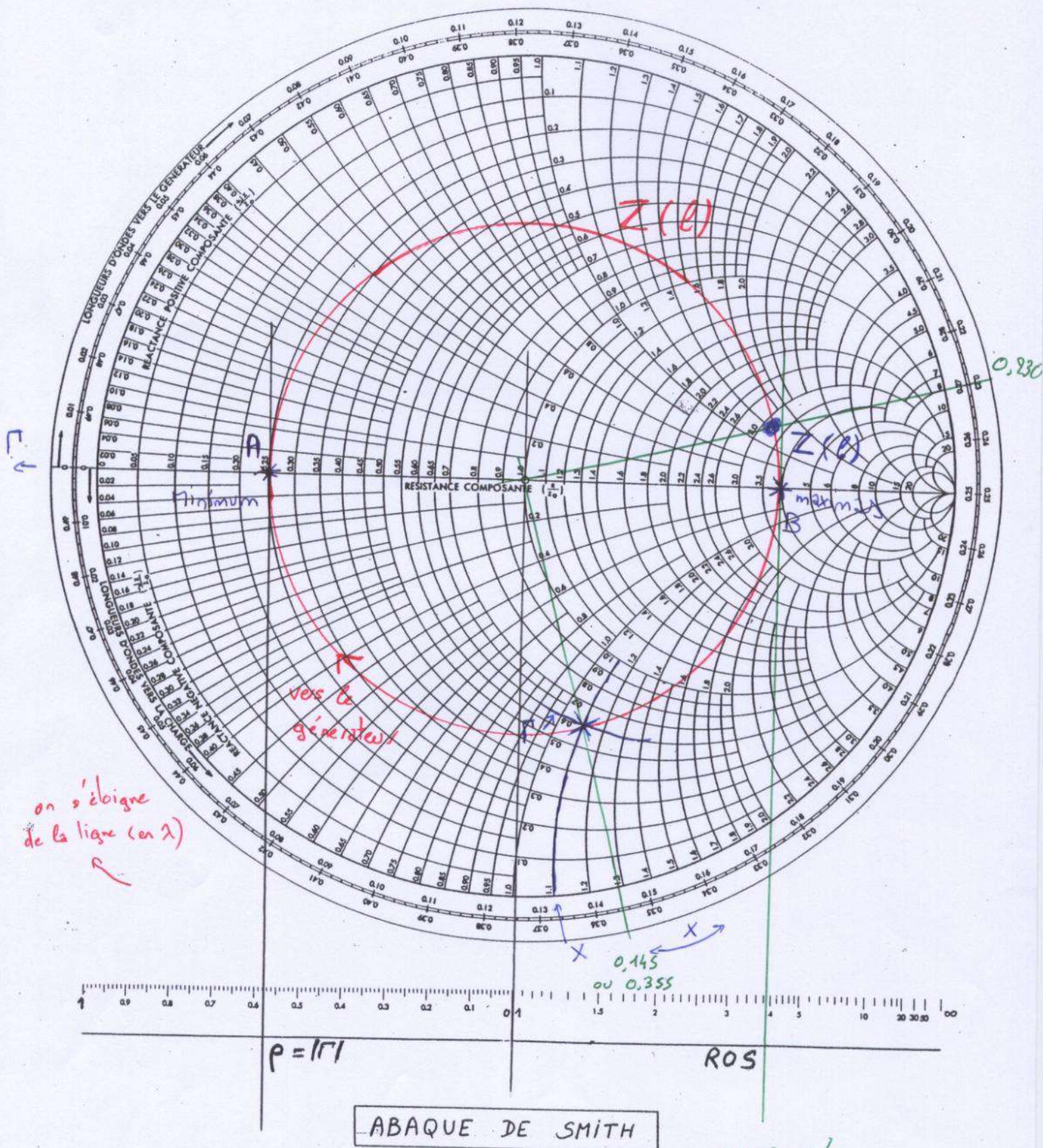
$$Z(l) = 0,53 + 0,6 j$$

$$= 26,5 + 30 j \Omega$$

Exercice 3 :

$$A: \Gamma = -\rho$$

$$B: \Gamma = +\rho$$



$\rho = \text{rayon du cercle rouge}$
 $= |\Gamma|$

A : minimum de tension
B : maximum de tension

A: minimum de tension
B: maximum de tension

