

TD1 : Canaux de transmission L3
Les lignes de transmission en régime harmonique
Diagramme de Smith

Exercice 1 : impédance ramenée et ondes stationnaires

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique R_c , alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge d'impédance Z_t , on désignera par " l " l'abscisse courante, l'origine étant sur la terminaison.

- 1) En rappelant les équations générales des lignes sans pertes (expressions des tensions et courants le long de la ligne), exprimer $Z(l)$, impédance "ramenée" par la ligne à l'abscisse l , en fonction de R_c , Z_t et l .
- 2) Examiner les cas particuliers pour lesquels Z_t vaut 0 (court-circuit) et ∞ (circuit ouvert) : quelle remarque peut-on faire sur ces valeurs particulières de $Z(l)$? En fonction de la valeur de l , quels sont les dipôles équivalents obtenus ?

Exercice 2 : Mesures sur une ligne

On considère une ligne sans pertes réalisée par deux conducteurs en cuivre isolés au plastique et torsadés, de résistance caractéristique $R_c = 100 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de fréquence 250 MHz, de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge de résistance R_t réelle.

- 1) En déplaçant un voltmètre branché en dérivation sur la ligne, on constate que l'écart entre deux minima consécutifs de tension vaut 20 cm. En déduire la vitesse de propagation sur la ligne ainsi que le coefficient diélectrique du plastique utilisé pour l'isolant.
- 2) Cette même mesure révèle un ROS égal à 3. En déduire alors la valeur de la charge R_t .
- 3) On insère un tronçon de ligne de longueur $\lambda/4$ ("tronçon quart d'onde") entre le bout de la ligne précédente et la charge R_t . Montrer qu'il est possible de choisir la résistance caractéristique R_o de ce tronçon de telle façon que l'impédance d'entrée de l'ensemble [tronçon quart d'onde + charge] vaille R_c .

Exercice 3 : propriété de l'Abaque de SMITH

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique $R_c = 50 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une charge d'impédance $Z_t = (30 - j55) \Omega$, on désignera par " l " l'abscisse courante, l'origine étant sur la terminaison. La longueur d'onde mesurée vaut $\lambda = 8$ cm.

- 1) Déterminer le rapport d'onde stationnaire et le coefficient de réflexion.
- 2) Déterminer l'impédance ramenée à 11 cm de la charge.
- 3) Déterminer la position des maxima et minima de tension sur la ligne ainsi que la valeur de l'impédance en ces points.

Exercice 4 : propriété de l'Abaque de SMITH

On considère une ligne sans pertes, de résistance caractéristique $R_c = 50 \Omega$, alimentée par une source sinusoïdale de force électromotrice E_g et de résistance interne réelle R_g . Cette ligne est terminée par une impédance inconnue Z_t . On mesure un $ROS = 2,7$ et la position du premier minimum de tension à partir de la charge est $x_m = 34,8 \text{ cm}$. La longueur d'onde mesurée vaut $\lambda = 1 \text{ m}$, la longueur de la ligne est $l = 1,45 \text{ m}$.

- 1) Déterminer la valeur de l'impédance de la charge.
- 2) Déterminer l'impédance d'entrée de la ligne.

TD. 1.1. impédance ramenée et ondes stationnaires

$$\begin{cases} V(l) = A e^{j\beta l} + B e^{-j\beta l} \\ I(l) = \frac{1}{R_c} (A e^{j\beta l} - B e^{-j\beta l}) \end{cases}$$

$$Z(l) = \frac{V(l)}{I(l)} = \frac{R_c (A e^{j\beta l} + B e^{-j\beta l})}{A e^{j\beta l} - B e^{-j\beta l}}$$

car parties imaginaires nulle

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{B}{A} \\ Z(l) &= \frac{R_c \frac{1}{A} (A e^{j\beta l} + B e^{-j\beta l})}{\frac{1}{A} (A e^{j\beta l} - B e^{-j\beta l})} = \frac{R_c (e^{j\beta l} + \Gamma e^{-j\beta l})}{e^{j\beta l} - \Gamma e^{-j\beta l}} \\ &= \frac{R_c \left(e^{j\beta l} + \frac{Z_l - R_c}{Z_l + R_c} e^{-j\beta l} \right)}{e^{j\beta l} - \frac{Z_l - R_c}{Z_l + R_c} e^{-j\beta l}} = R_c \frac{(Z_l + R_c) e^{j\beta l} + (Z_l - R_c) e^{-j\beta l}}{(Z_l + R_c) e^{j\beta l} - (Z_l - R_c) e^{-j\beta l}} \\ &= R_c \frac{(Z_l + R_c) (\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) + (Z_l - R_c) (\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))}{(Z_l + R_c) (\cos(\beta l) + j \sin(\beta l)) - (Z_l - R_c) (\cos(\beta l) - j \sin(\beta l))} \\ &= R_c \frac{2 Z_l \cos(\beta l) + 2 j R_c \sin(\beta l)}{2 R_c \cos(\beta l) + 2 j Z_l \sin(\beta l)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{on factorise} \\ \text{par } Z_l \\ \text{et } R_c \end{array} \right\} \div 2 \cos(\beta l) \end{aligned}$$

$$Z(l) = R_c \frac{Z_l + j R_c \tan(\beta l)}{R_c + j Z_l \tan(\beta l)}$$

$$* Z_l \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{\infty}(l) = Z_l \rightarrow \infty \quad \lim_{Z_l \rightarrow \infty} Z(l) = \lim_{Z_l \rightarrow \infty} \frac{R_c \cancel{Z_l}}{j \cancel{Z_l} \tan(\beta l)} = \frac{R_c}{j \tan(\beta l)} = -j R_c \cot(\beta l)$$

$$Z_l \rightarrow 0 \Rightarrow Z_0(l) = Z_l \rightarrow 0 \quad \lim_{Z_l \rightarrow 0} Z(l) = \lim_{Z_l \rightarrow 0} \frac{R_c j R_c \tan(\beta l)}{R_c} = R_c j \tan(\beta l)$$

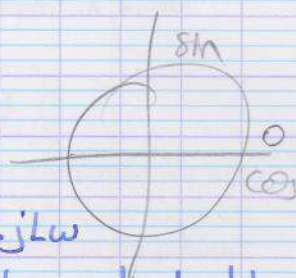
Ce sont des imaginaires
purs donc des réactances.

Dans les 2 cas, on obtient un imaginaire pur donc une réactance.

Avec $Z_r = 0 \Rightarrow Z_0(l) = j R_c \tan(\beta l)$

* $l=0 \quad Z_0(0) = 0$ (court-circuit)

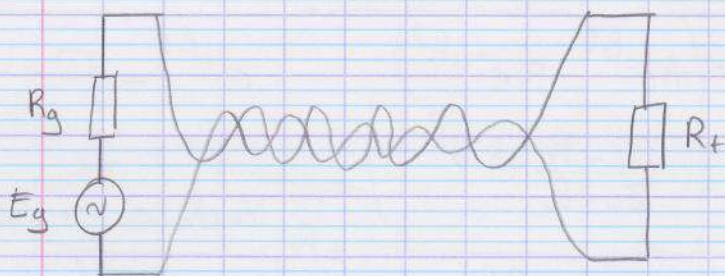
$0 < \beta l < \pi/2, \quad Z(l) = jX$ avec $X > 0$
 donc comportement inductif (bobine) $\Rightarrow jL\omega$



$\beta l = \pi/2, \quad Z(l) \rightarrow \infty$ (circuit ouvert) (donc le courant est nul localement)

$\pi/2 < \beta l < \pi \quad Z_0(l) = -jX \quad (X > 0) \Rightarrow$ comportement capacitif ($\frac{1}{jC\omega}$)

Ex. 2 Mesure sur une ligne



$f_c = 100 \text{ L}$

$f = 250 \text{ MHz}$

$\frac{\lambda}{2} = 20 \text{ cm}$ (distance entre 2 minima)

$\lambda = 40 \text{ cm}$

$\lambda = \frac{v}{f} \quad \text{ssi} \quad v = \lambda f = 10 \times 10^{-2} \times 250 \cdot 10^6$
 $= 10^4 \times 10^{-2} \times 10^6$
 $= 1 \cdot 10^8$

$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_R \mu_R}} \quad \text{ici} \quad \mu_R = 1 \quad (\text{cas du cuivre})$

Donc $\epsilon_R = \left(\frac{c}{v} \right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 10^8}{1 \cdot 10^8} \right)^2 = 9$ sans unité car c'est une permittivité relative

2. $ROS = 3 \quad \frac{R_r \text{ est réel}}{ROS \neq 1 \text{ donc } R_c \neq R_r}$

$ROS = \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = \frac{1+p}{1-p} = 3 \quad \text{ssi} \quad 1+p = 3-3p$
 $4p = 2$
 $p = \frac{1}{2}$

$$\Gamma = \rho e^{j\varphi}$$

donc pas de partie imaginaire

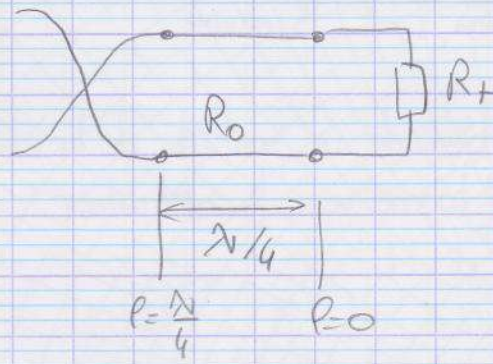
Or R_t réel $\rightarrow \Gamma = \rho = \pm \frac{1}{2}$

$$R_t = R_c \times \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma} \xrightarrow{+\frac{1}{2}} 300 \Omega$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}} 33,3 \Omega$$

On sait que $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$
donc si on a $l = \frac{\lambda}{4}$, $\beta l = \frac{\pi}{2}$

3.



$$Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = \frac{R_0 Z_t + j R_0 \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}{R_0 + j Z_t \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{R_0 \cdot j R_0}{j R_t} = \frac{R_0^2}{R_t}$$

Pour adapter, il faut que $R_c = R_t$

donc $Z\left(\frac{\lambda}{4}\right) = R_c$

$$\Rightarrow R_c = \frac{R_0^2}{R_t} \quad \text{si} \quad R_0 = \sqrt{R_c R_t}$$

Plus aucune réflexion, puissance maximale transmise, ROS = 1

27/02/13

Ex. 3.1.

$$Z_t = 30 - j55 \Omega$$

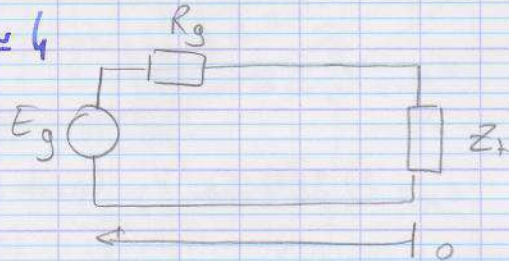
$$Z = \frac{Z_t}{R_c} = \frac{30 - 55j}{50} = 0,6 - 1,1j$$

$$|\rho| \approx 0,6$$

$$ROS \approx 4$$

Ex. 3.2

$$\frac{l}{\lambda}$$



$$\frac{l}{\lambda} = \frac{11}{8} = 1,375$$

Donc que vaut l'impédance à 11cm
donc on va vers le générateur

Un tour d'abaque correspond à $\frac{\lambda}{2}$ et à 0,5

$$\frac{l}{\lambda} = \underbrace{0,5}_{1 \text{ tour}} + \underbrace{0,5}_{1 \text{ tour}} + \underbrace{0,375}_{\text{reste}}$$

On prolonge la demi-droite $[O, M)$ on tombe sur $O, 165$.

On va vers le générateur. On arrive en $O, 23$. (point N) que l'on place sur le cercle.

$$z_N = 3,3 + 1,6j \Rightarrow Z_N = 165 + j80$$

Ex. 3.3. A minima et B maxima

Donc, à combien de cm sont-ils de la charge ?
Pour l'instant, on tourne vers le générateur

(on part de M)

A à $0,145$ et B à $0,395$

$$\begin{aligned} \text{minima de tension} \Rightarrow x_{\min} &= 0,145 \lambda + k \frac{\lambda}{2} \quad k \in \mathbb{N} \\ &= 1,16 + k\lambda \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{maxima de tension} \Rightarrow x_{\max} &= 0,395 \lambda + k \frac{\lambda}{2} \\ &= 3,16 + k\lambda \text{ cm} \end{aligned}$$

$$z_A = 0,25$$

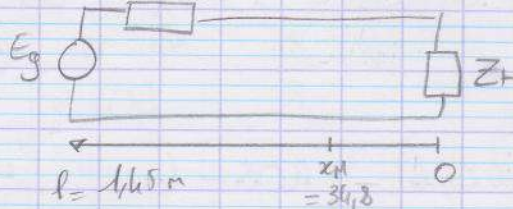
$$Z_A = 12,5$$

$$z_B = 4$$

$$Z_B = 200$$

R_g

Ex. 4.1.



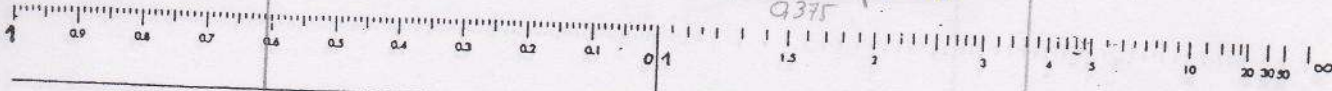
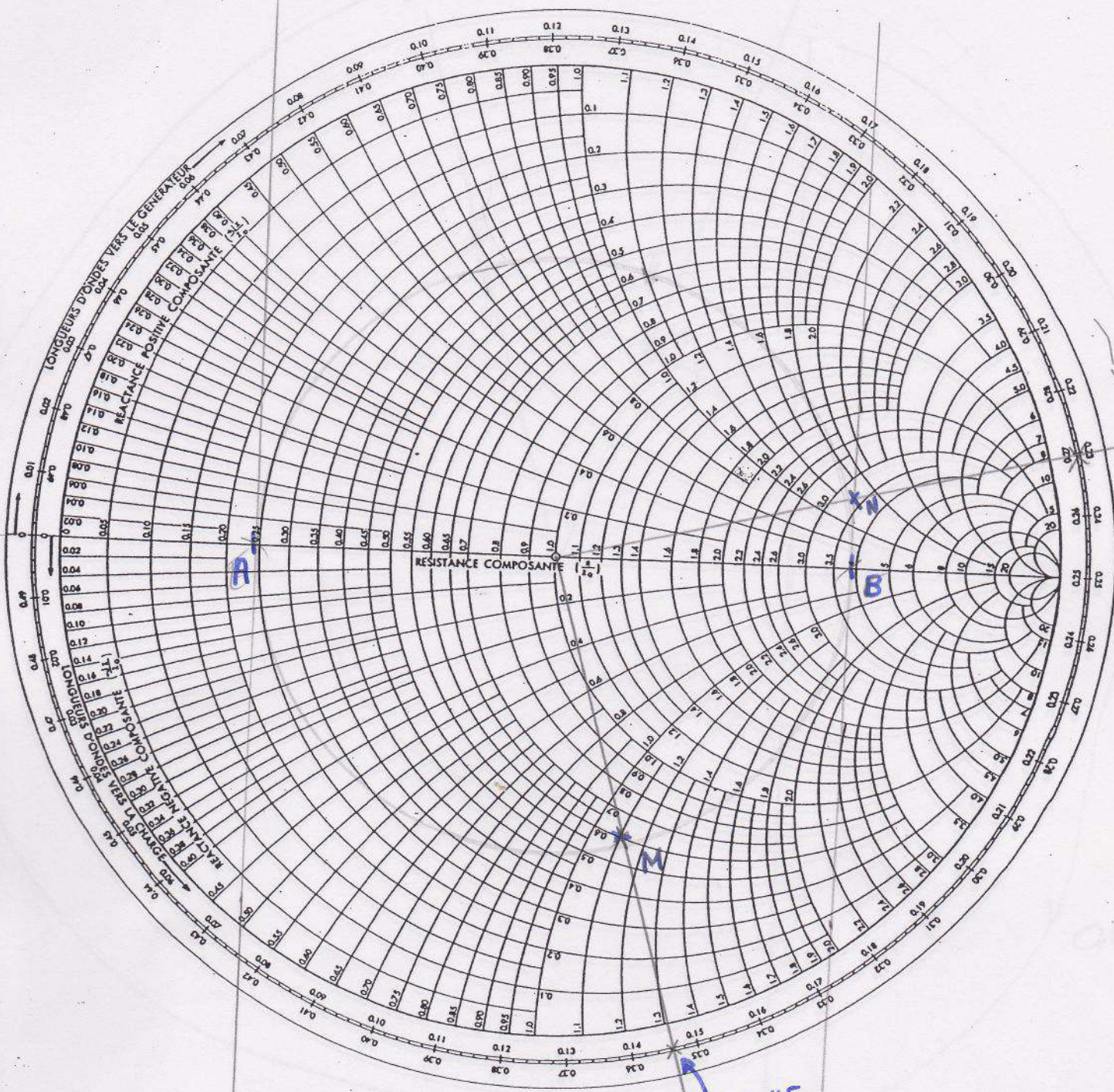
$$\frac{z_M}{\lambda} = 0,348$$

$$z_M = 0,88 + 0,95j \text{ (point M)} \quad Z_L = z_M \times 50 = 44 + 47,5j$$

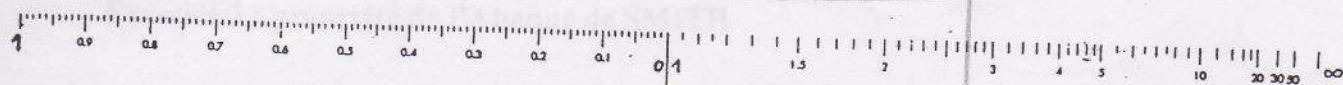
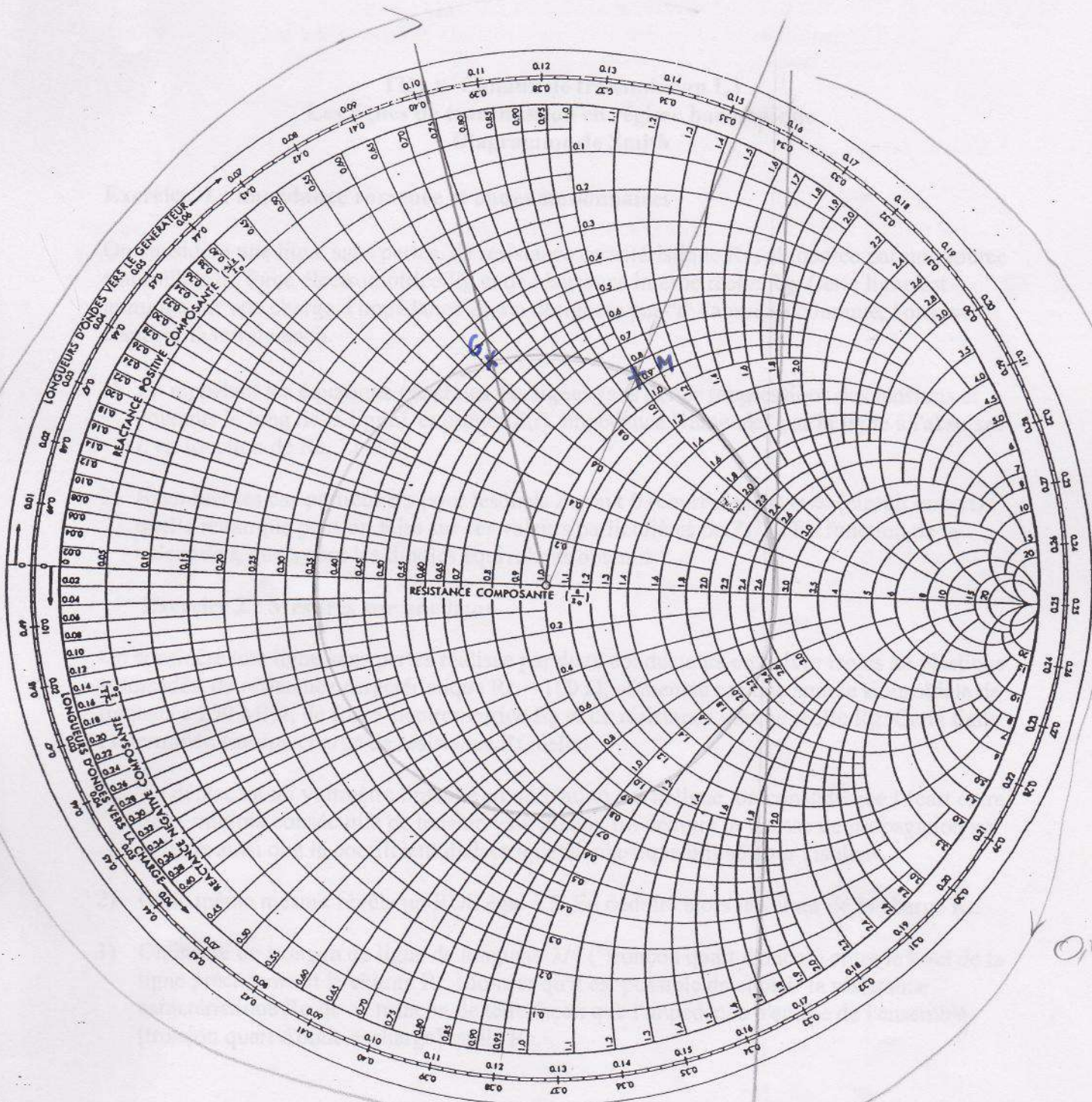
4.2. Donc impédance à $1,45 \text{ m}$

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1,45}{1} = 0,5 + 0,5 + \underline{0,45}$$

$$z_G = 0,53 + 0,6j \Rightarrow Z_G = 26,5 + 30j$$



ABAUQUE DE SMITH



$\rho = |r|$

ROS

ABAQUE DE SMITH