

FABEN
L'ANNOUSSIÉ
SCNET L3
Group B

Communications Numériques
Sujet N°3
Codes correcteurs

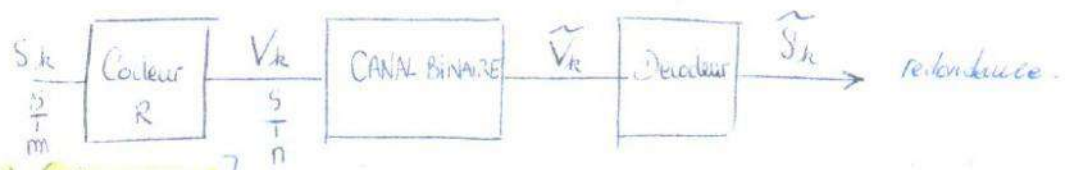
703 ①
le 14/12/08

1 Code Hamming.

code de longueur 2
mot de source de 4 bits
mot $V \rightarrow 7$ bits

$$S = (s_1, s_2, s_3, s_4)$$

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$$

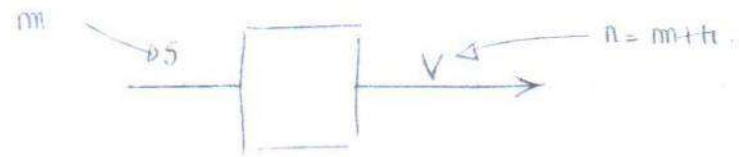


1.1) Code séparable?

Code par bloc $\rightarrow$ on sépare la source en blocs de taille identique.

Code séparable $\rightarrow$ on peut séparer la source et la redondance (V)

le mot code V est le mot de source auquel on ajoute la séquence de contrôle.
le mot de source S est explicite dans le mot V



$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ | \\ s_4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$$

12

$$V = G(n, m)S$$

7x1 7x4 4x1

matrice binaire

$$V_1 = s_1$$

$$V_2 = s_2$$

$$V_3 = s_3$$

$$V_4 = s_4$$

$$V_5 = a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4$$

$$V_6 = b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + b_4 s_4$$

$$V_7 = c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4$$

Equations de vérification

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + v_5 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + v_6 = 0$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + v_7 = 0$$

$$H \cdot V = 0$$

$$V = G \cdot S$$

$$3 \times 7 \quad 7 \times 1 \quad 3 \times 1$$

115

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4} & 1 & 0 & 0 \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$H \qquad V \qquad 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4} \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \\ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \end{pmatrix}$$

G

Si V' calcule une erreur sur la i^e composante de V alors:

$$V_k = V_k \quad \text{si } k \neq i$$

$$V_i' = V_i + 1$$

$V = V + E_i$ — les n composants à 0 sauf la i^{eme} ligne à 1
ex $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$1,6) \quad H V' = H(V + E_i)$$

* Code de Hamming

Code B2 : $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix}$ redonne source code par $V = GS$

$$= \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{4}{7}$$

G est la matrice génératrice ($n \times m$) permet de créer le mot de code V (de taille n) à partir du mot de source S (de taille m) - $n = m + h$

$G = \begin{pmatrix} I_m \\ H_{n,m} \end{pmatrix}$. À la réception, on a V' - on calcule $Z = H V'$. (H matrice de contrôle)
 Z de taille h ($h=3$) est le syndrome

G est la matrice génératrice ($n \times m$) permet de créer le mot de code V (de taille n) à partir du mot de source S (de taille m)

$$n = m + h$$

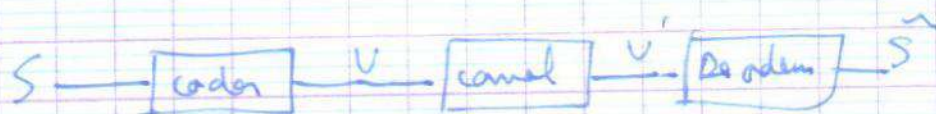
Hyp : $V' = U$ (pas d'erreurs de transmission)

$$Z = H V' = H V = 0$$

Msg: $V' \in V$: on a une erreur à la i ème composante du mot de code

$$V' = V + E_i \quad Z = H V' = H E_i = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } H$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ position}$$



$$H = (A_H, m I_n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ex: V' est V avec une erreur sur la 3^{ème} composante

pour une erreur
sur un bit
c'est-à-dire
ajouter 1

$$H V' = H (V + E_3) = H V + H E_3 = H E_3$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 100$$

Si on a comme syndrome: 100, on a une erreur car il est non nul.
On cherche la colonne de H qui vaut 100

$$\text{A la réception de } V' = \begin{pmatrix} V'_1 \\ \vdots \\ V'_i \\ \vdots \\ V'_7 \end{pmatrix} \quad \text{On calcule } Z = H V'$$

$$* Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Pas d'erreur de transmission}$$

$$* Z \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{erreur de transmission}$$

$$Z = H V' = H E_i = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } H$$

On compare Z avec les n colonnes de H et la position de l'erreur dans V (i) est la position de Z dans H
on cherche:

7.10] Condition: Il doit y avoir une seule erreur, de plus toutes les colonnes de H doivent être différentes

Condition pour retrouver la position de l'erreur.
Toutes les n colonnes de H doivent être différentes entre elles et différentes de 0

Il y a n colonnes de H
Les colonnes de H sont de taille k
On a $n = 2^k - 1$ on ordonne la colonne 0
nb de colonne $\downarrow$ ligne donc 2^k

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice A

exemple

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice identité

matrice A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$h=3$$

$$n=2^3-1=7$$

$$m=n-h=7-3=4$$

exemple $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = GS$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hypothèse: pas d'erreur de transmission

On reçoit $V' = V$, On calcule $Z = HV$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad HV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hypothèse: on reçoit: $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On calcule $Z = HV'$

(3) TDB

$$H V' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) 10 = a 0

le syndrome est non nul donc on cherche ou est l'erreur

la 2^{ème} ou la 2^{ème} l'erreur (c'est la 2^{ème} capsule)

de H → On a fait un erreur la 2^{ème} capsule,

donc (cl, V = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)

V' = $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

on voit que l'erreur est la 2^{ème} capsule donc ici

S = $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$n = 2^k - 1$ (en general)

$m = n - k$

↑
nombre de bits

k	n	m	Codeur = $\frac{m}{n} = R$
2	3	1	1/3
3	7	4	4/7
4	15	11	11/15
5	31	26	26/31

+ le rendement ...

Si mot de code en ... a plus de nat a coder les e

2) CODE CONVOLUTIONNELS

1er code
 $g^{(1)}(x) = x^2 + x + 1$

2nd code
 $g^{(2)}(x) = x^2 + 1$



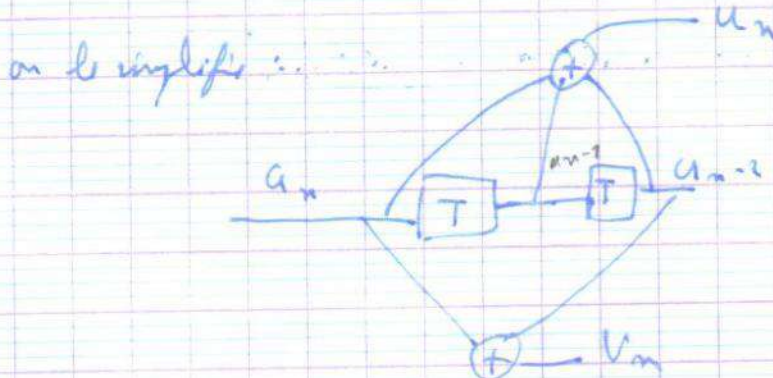
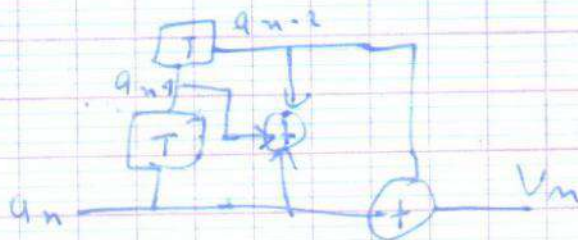
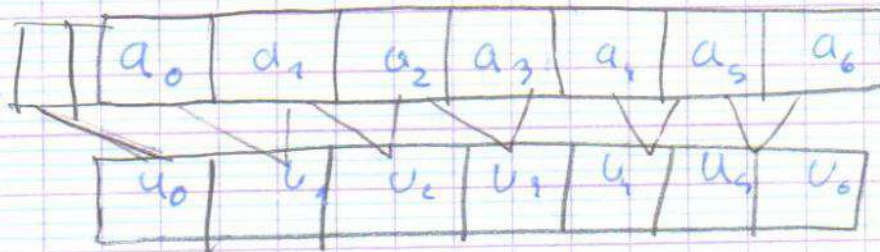
le débit de sortie 2 x l'egalité en valeur qu'en entrée

$$u_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$v_n = a_{n-2} + a_n$$

donc c'est un code de convolution

Chia:

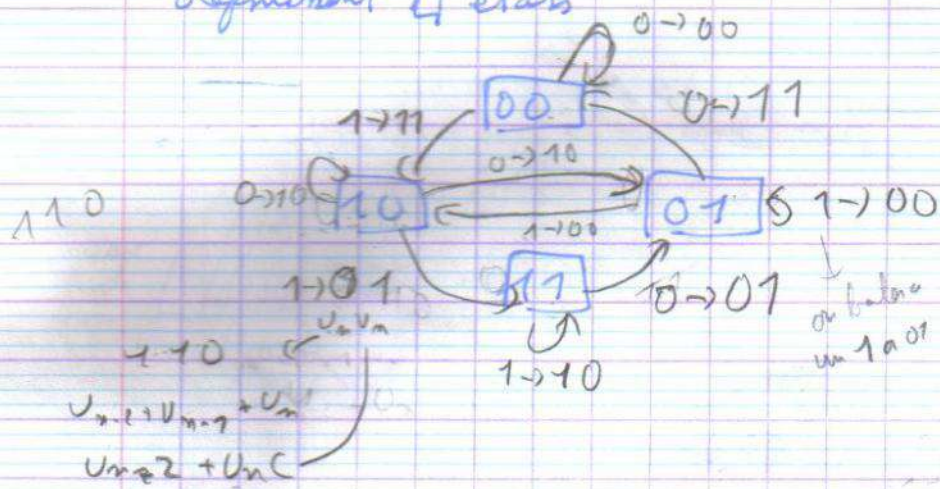


La convolution:

q: entier
 u: entier

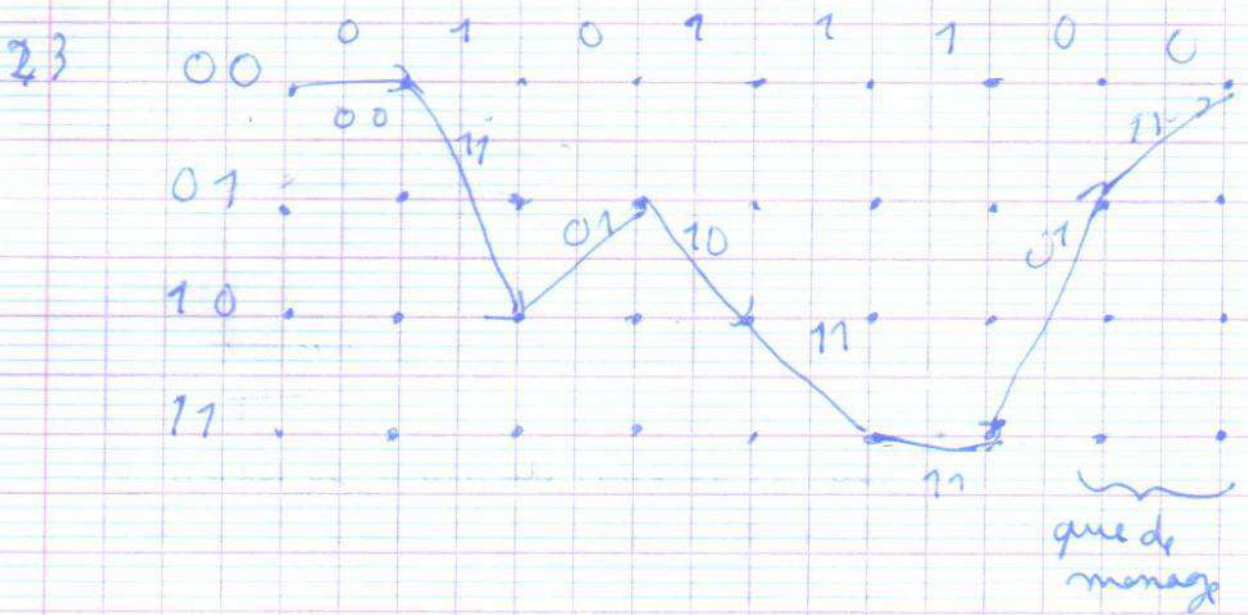
$$u(t) = \int_0^{t-2} h(\delta) d\delta$$

La combinaison de bits de chacun des registres définissent 4 états



$$U = U_m - L + U_1 + U_m$$

$$V \approx$$

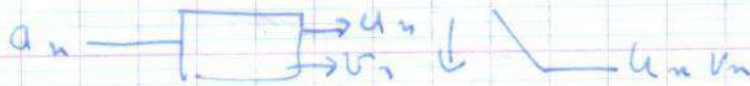


donc $u_n, v_n = 0011\ 1010\ 0001\ 100111$

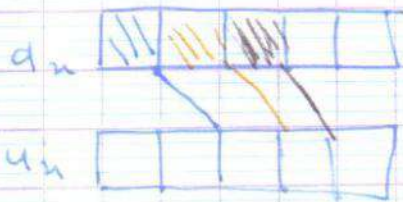
$V_1 V_2 : \underbrace{00011}_Z \underbrace{00}_{\bar{Z}} \underbrace{101700}_{S_3} \underbrace{160}_{S_3}$

le decodage comp. par 256 requies.

Rappel: Codeage convolutif

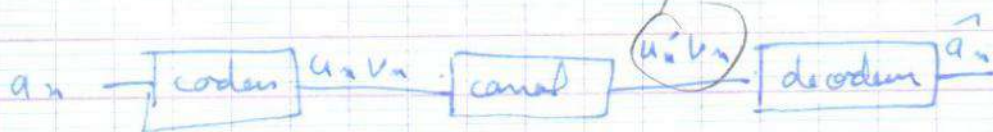


$$R = 1/2$$



$$u_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2}$$

Quint pour u_n mais u_n c'est la différence binaire (attention)



decodeur: maximum de ressemblance

Quelle est la suite $\hat{a}_n$ qui a le plus de proba d'avoir
généraliser une suite $u_n v_n$ dont la modification par le
canal renvoie $u_n' v_n'$

La suite $\hat{a}_n$ généralise la suite $u_n v_n$ la plus proche de
 $u_n' v_n'$

(4) T03

disjunct 3
anonyme

Sent: 6 l'inc T03 n=2

1 1 0

0 1 0

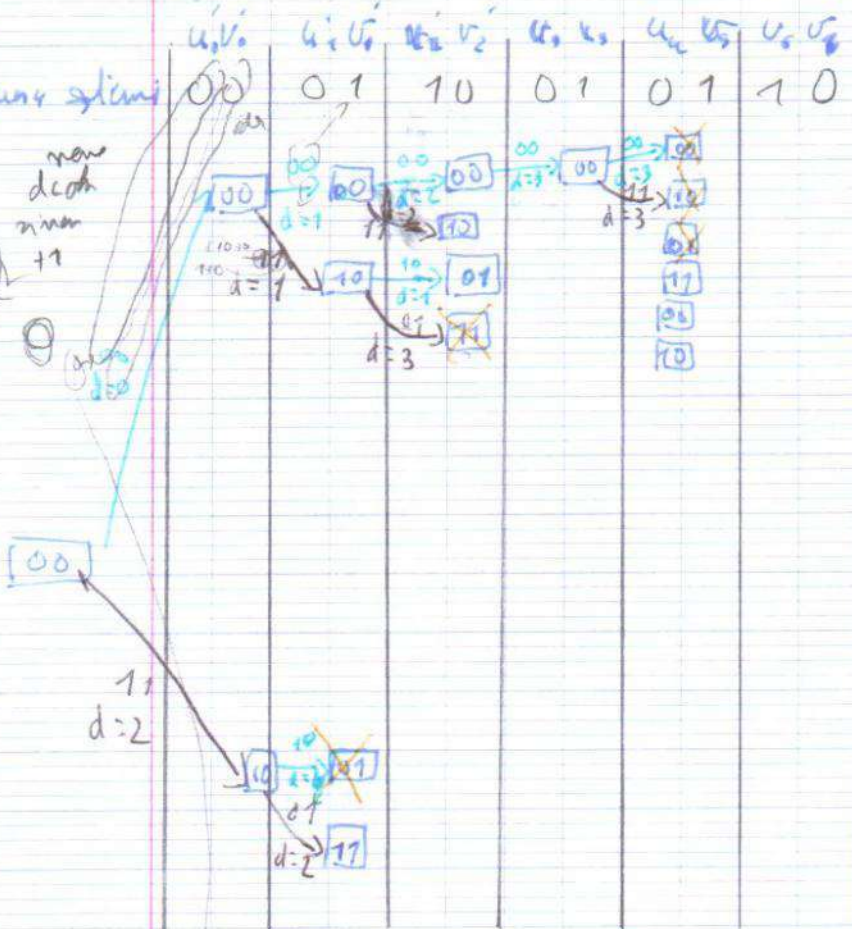
$$u_n = \sum_{i=1}^n u_i + u_n \quad \sum_{i=1}^n u_i + u_n$$

2,3

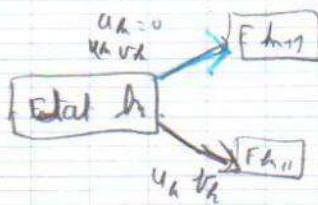
regroupement

non
deco
n=1

(Von Rant !)



0 1 0 1 1 1 0 1



Surjet 203

1) 1 code séparable on retrouve le message séparé à l'ap

2 $V = 65$ V est colonne de dim 7

$S = 1111111$

G matrice 7×4

$$3. \quad v_1 = a_1 \quad v_2 = a_2 \quad v_3 = a_3 \quad v_4 = a_4$$

$$v_5 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1$$

$$v_6 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 + b_4 a_4$$

$$v_7 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 + c_4 a_4$$

$$4. \quad a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_4 v_4 + v_5 = 0$$

$$b_1 v_1 + \dots + b_4 v_4 + v_6 = 0$$

$$c_1 v_1 + \dots + c_4 v_4 + v_7 = 0$$

5)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. $V' = V + E$ si pas d'erreur $E_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7. si erreur $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $Z = H E$

8. Il faut que chaque syndrome permette de détecter la position de l'erreur

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (H)$$

Toute permutation des 4 premières colonnes est possible

↑ ↑ ↑ ↑
1113 1113 1113 1113

40.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A$$

$$r_5 = r_1 + r_2 + r_4$$

$$r_6 = r_1 + r_3 + r_4$$

$$r_7 = r_2 + r_3 + r_4$$

41.

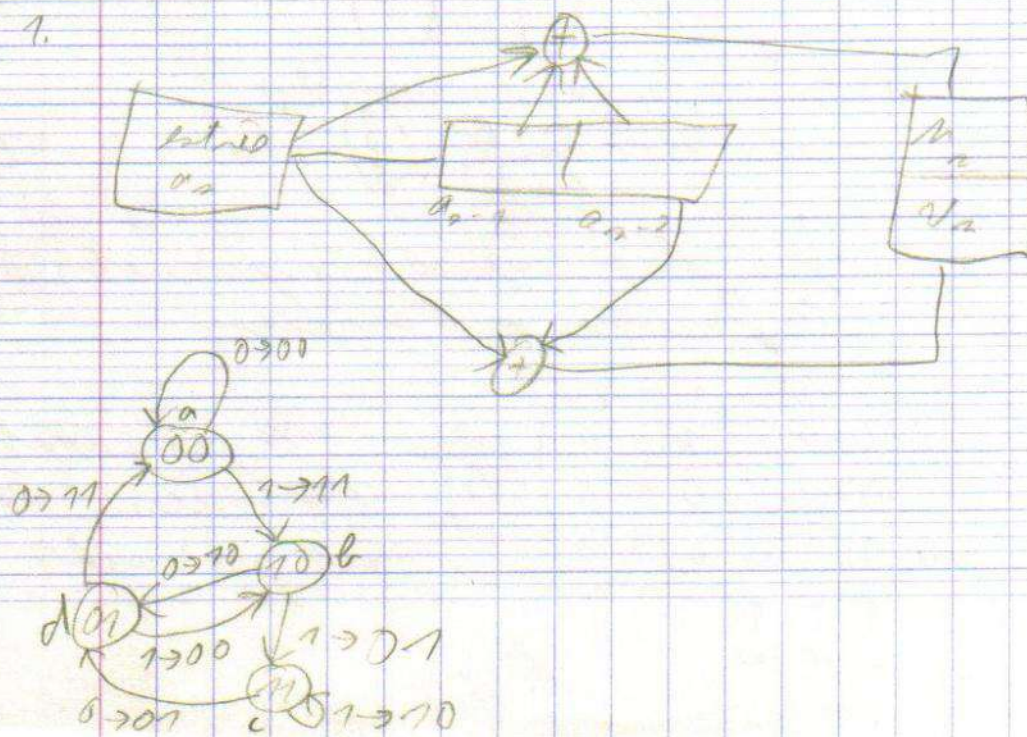
Résumé

est de 4 bits $\rightarrow$ relations de codage $\rightarrow$ est de 7 bits
que l'on envoie. à la réception, on applique la
relation de récif 1) 4. si $g = 0$ pas d'erreur,
si $g \neq 0$ une erreur g indique la position de
l'erreur

2)

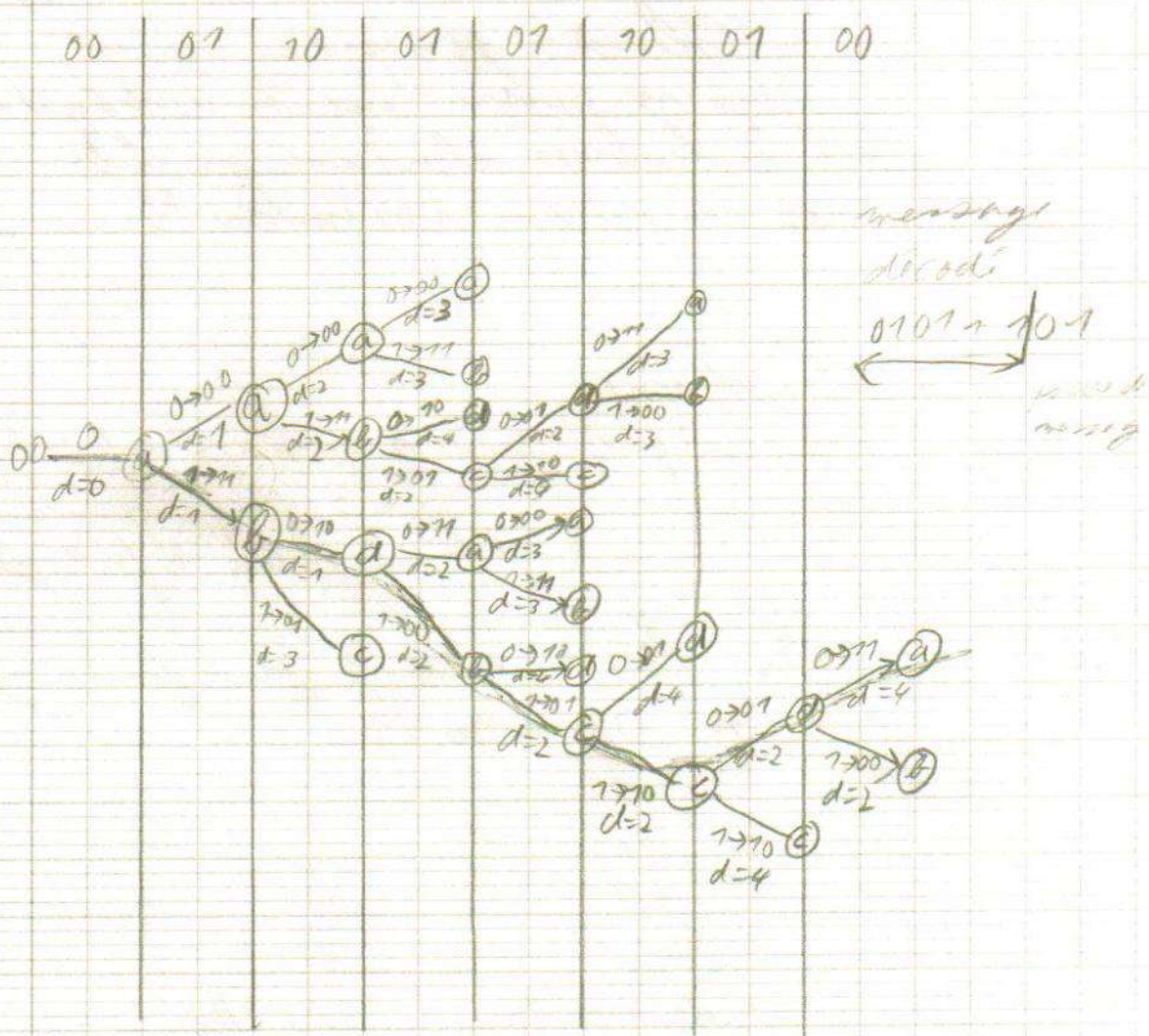
Chaque bit de n est binaire en sortie de codeur
dépend non seulement du bit binaire présent en
entrée mais aussi des m blocs précédents
précédemment. La introduction d'un effet de
mémoire d'a durée

4.



water	0	1	0	1	1	1	0	0
dist	00	10	01	10	11	11	01	00
colix	00	11	10	00	01	10	01	11

← messaggi involti



⚠ Les colonnes doivent être $\neq$ les entre elles
⚠ ————— de 0

7x

CONDITIONS

- ① Toutes les colonnes de H sont $\neq$ les entre elles
② ————— de 0

On a donc 7 colonnes dans H

Exemple

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$V = GS$$

(...)

(...)

On trouve $\left(\frac{1}{2}\right)$ $\hat{=}$ erreur

Donc 3^{em} colonne $\Rightarrow$ erreur ⚠

Exemple suite

Coder $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = GS = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \cdot 1$$

On transmet V
On reçoit V'

On est modulo 2

Donc $1+1=0$

① On reçoit $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On calcule $HV' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Z = 0$

Donc pas d'erreur car $Z=0$

Donc $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ car pas d'erreur

$\Rightarrow$ idem que à V donc ça confirme qu'il n'y a pas d'erreurs

② On reçoit $V' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$Z = HV' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0$ Donc il y a 1 erreur

Erreur au n° de la 2^e colonne de $H \Rightarrow$ On corrige la 2^e colonne de V'

Donc $V = V' + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Attention!

$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc $S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

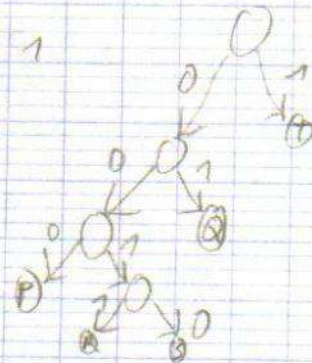
000101 0011101
P | T | Q | R | T | Q |

Sujet 4

1)

T	0,35	0,35	0,35	0,65	→ 1
Q	0,3	0,3	0,25	0,35	→ 1
P	0,2	0,2	0,3		
S	0,1	→ 0,45			
R	0,05				

T	1	1	1	0	→ 1
Q	01	01	00	1	
P	000	000	01		
S	0010	→ 001			
R	0011				



mot code de chq. symbole

$$L = \sum P_i \cdot l_i = 0,35 \times 1 + 0,3 \times 2 + 0,2 \times 3 + 0,1 \times 4 + 0,05 \times 4 = 2,75$$

$$\frac{H(b)}{\log_2} < L < \frac{H(b)}{\log_2} + 1$$

$$\frac{H(b)}{\log_2} = 2,07$$

$$H(b) = \sum P_i \cdot \log_2 \frac{1}{P_i} = 0,35 \times 1,46 + 0,3 \times 1,73 + 0,2 \times 2 + 0,1 \times 2,41 + 0,05 \times 2,97 = 2,07$$

$$\log_2 = \log_2 = 0,3$$

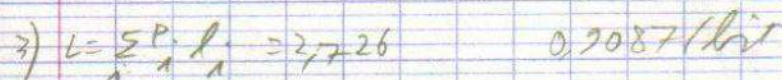
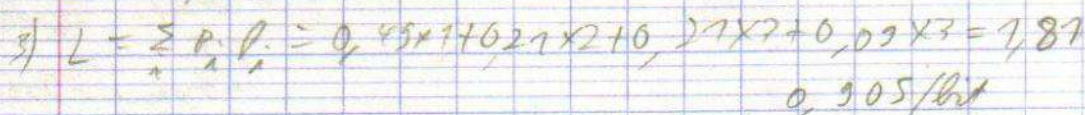
⇒ propriété vérifiée donc code compact

2)

0	A	0,3	0,3	0,7	→ 1
+0	B	0,2	0,3	0,3	→ 0
+ -	C	0,2	0,2		
+++	D	0,1	0,2		
++0	E	0,1			
+- -	F	0,1			

$$L = \sum P_i \cdot l_i = 0,3 \times 1 + 0,2 \times 2 + 0,2 \times 2 + 0,1 \times 3 + 0,1 \times 3 + 0,1 \times 3 = 2$$

Lenti



On est déjà à la limite donc on ne pourra pas avoir une bgt lit inférieure