

FABIEN
LAROUSSE
SONNET L3
Groupe B

Communications Numériques
Sujet N°3
Codes correcteurs

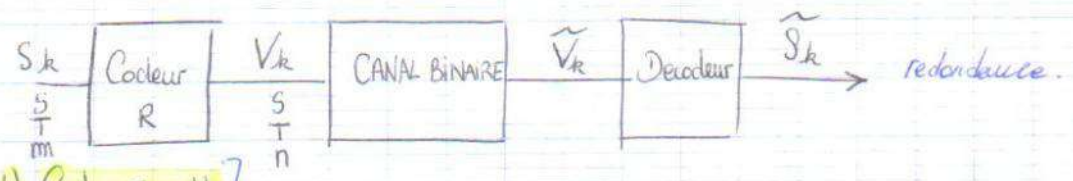
le 19/01/08

1. Code Hamming.

addition modulo 2
mot de source de 4 bits
mot $V \rightarrow 7$ bits

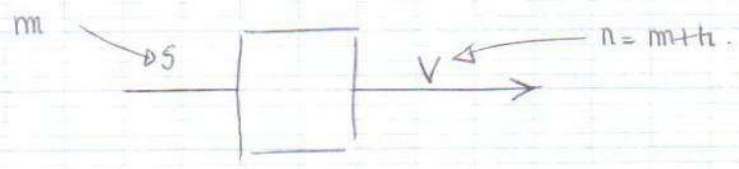
$$S = (s_1, s_2, s_3, s_4) \begin{cases} \rightarrow 0 \\ \rightarrow 1 \end{cases}$$

$$V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)$$



1.1) Code séparable?

Code par bloc $\rightarrow$ on sépare la source en blocs de taille identique.
Code séparable $\rightarrow$ on peut séparer la source et la redondance (V).
le mot code V est le mot de source auquel on ajoute la séquence de contrôle.
le mot de source S est explicite dans le mot V



$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ | \\ s_4 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ | \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}$$

$$V = G(n, m) S$$

matrice binaire.

7×1 7×4 4×1

$$\begin{aligned} V_1 &= S_1 \\ V_2 &= S_2 \\ V_3 &= S_3 \\ V_4 &= S_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_5 &= a_1 s_1 + a_2 s_2 + a_3 s_3 + a_4 s_4 \\ V_6 &= b_1 s_1 + b_2 s_2 + b_3 s_3 + b_4 s_4 \\ V_7 &= c_1 s_1 + c_2 s_2 + c_3 s_3 + c_4 s_4 \end{aligned}$$

Equations de vérification.

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 + v_5 = 0$$

$$b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 + b_4 v_4 + v_6 = 0$$

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + c_4 v_4 + v_7 = 0$$

$$H.V = 0$$

$$3 \times 7 \quad 7 \times 1 \quad 3 \times 1$$

$$V = G.S$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4} & 1 & 0 & 0 \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} H & V & 0 \end{matrix}$
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \boxed{a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4} \\ b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \\ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4 \end{pmatrix}$
 $\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ G \end{matrix}$

Si V' contient une erreur sur la i^e composante de V alors:

$$V'_k = V_k \quad \text{si } k \neq i$$

$$V'_i = V_i + 1$$

$V' = V + E_i$ ← les n composantes à 0 sauf la i^{eme} ligne à 1

ex $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$H.V' = H(V + E_i)$$

Fabien
LARROUSSINIE
SONNET
L3

Communication Numérique

Le 09/01/09

Sujet n°3

Code de Hamming

Code Bloc

$$S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{pmatrix} \text{ vecteur source codé par } V = GS = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{pmatrix} \quad R = \frac{4}{7}$$

G est la matrice génératrice ($n \times m$) permet de créer un mot de code V (de taille n) à partir du mot de source S (de taille m)
 $n = m + k$

$$G = \begin{pmatrix} I_m \\ A_{k,n} \end{pmatrix} \quad \text{A la réception, on a } V'. \text{ On calcule } Z = HV' \\ (H: \text{matrice de contrôle}) \\ Z \text{ de taille } k (k=3) \text{ est le syndrome.}$$

Hypothèse: $V' = V$ (pas d'erreur de transmission)

$$Z = HV' = HV = 0$$

Hypothèse: $V' \neq V$ on a une erreur à la $i^{\text{ème}}$ composante du mot de code.

$$V' = V + E_i$$

$$Z = HV' = HE_i = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } H$$

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ position.}$$

$$H = \begin{pmatrix} A_{k,m} & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7) Ex V' est V avec une erreur sur la 3^{ème} composante
 $Z = HV' = H(V + E_3) = HV + HE_3 = HE_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3^{\text{ème}} \text{ colonne de } H$$

syndrome $\begin{cases} 000 : \text{pas d'erreur car syndrome nul.} \\ 100 : \text{il y a une erreur. Elle se trouve à la colonne de } H \text{ où se trouve } 100. \end{cases}$

A la réception de $V' = \begin{pmatrix} v'_1 \\ \vdots \\ v'_i \\ \vdots \\ v'_7 \end{pmatrix}$

On calcule $Z = HV'$

* $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ pas d'erreur de transmission

* $Z \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ erreur de transmission.

$$V' = V + E_i$$

$$Z = HV' = HE_i = i^{\text{ème}} \text{ colonne de } H$$

On compare Z avec les n colonnes de H

Et la position de l'erreur dans $V(i)$ est la position de Z dans H

10) Condition pour retrouver la position de l'erreur

Toutes les colonnes de H soient différentes - entre elles

- de zéros $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

n colonnes de H

Les colonnes de H sont de taille K

On a alors $n = 2^k - 1$ car on ne prend pas en compte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$k = 3$$

$$n = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$

$$m = n - k = 7 - 3 = 4.$$

$$H = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple: $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{matrice d'identité} \\ \text{matrice A: premiers éléments de H} \end{array} \right.$$

$$e_x = s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V = GS$$

$$n=7 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 1 + 0 \times 1 = 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = GS = V$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$HV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \overset{2}{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 = 1 \\ 1+1+1 = 1 \\ 1+1+1+1 = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

↑
erreur de transmission

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se trouve à la deuxième colonne de H
composant

conclusion: $V_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow S = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

suite Comm Num.

$n = 2^k - 1$
 $m = n - k$

rendement

le 09/01/09

k	n	m	$R = m/n$
2	3	1	1/3
3	7	4	4/7
4	15	11	11/15
5	31	26	26/31

Problème: augmenter la taille de son mot, augmente les risques d'avoir plus d'1 seule erreur.

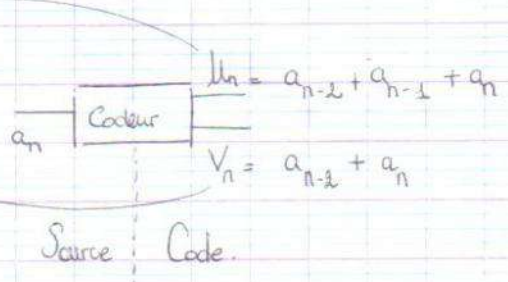
↓
code de Hamming obsolète.

2. Codes convolutifs.

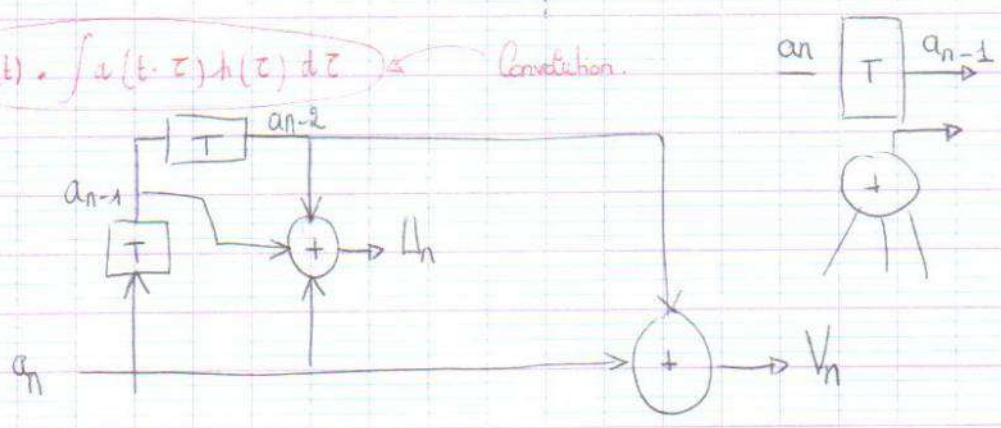
Rendement = $\frac{1}{2}$ → au envai le double de bits nécessaires au déchiffrement du mot

x^2 : retard de 2 unités
 x : retard de 1 unité

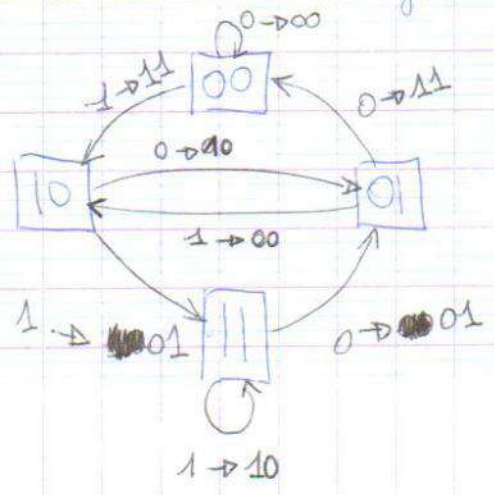
$g''(x) = x^2 + x + 1$
 $g^{(2)}(x) = x^2 + 1$



$u(t) = \int a(t-z)h(z)dz$ ← Convolution.



la combinaison des états de chacun des registres définissent 4 états



0 1 0 1 1 1 0 0

