
Communications Numériques



Sujet 1 : Codage numérique en bande de base

1.1 Codage NRZ

Afin de réaliser une communication numérique sur un câble de transmission (par voie électrique), on considère une suite numérique binaire ($\alpha_k = 0, 1$) aléatoire à valeurs équiprobables cadencée par une horloge de période T . On applique à cette information un codage trivial consistant à associer la valeur "-V" (tension électrique de valeur négative) à l'état binaire "0" et la valeur "+V" à l'état binaire "1" (ce code se nomme NRZ, *Non Return to Zero*).

1. Représenter un tel signal en fonction du temps ; on le nommera $x(t)$. Que peut-on déjà en tirer comme propriétés (au sens de la fonction du temps) ?

Afin d'évaluer la bande passante spectrale nécessaire à prévoir (ou à réserver) sur le câble, on cherche à exprimer le spectre d'un tel signal numérique.

2. Donner d'abord l'expression du formant de ce code, c'est-à-dire la fonction $g(t)$ qui permet d'exprimer le signal numérique $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = \sum_k a_k g(t - kT)$$

3. Rechercher l'expression du spectre $G(f)$ de cette fonction $g(t)$ et de la densité spectrale de puissance associée :

$$S_{gg}(f) = |G(f)|^2$$

4. Grâce à la formule de Bennett, exprimer la densité spectrale de puissance $S_{xx}(f)$ du signal numérique $x(t)$ et la représenter.
5. Que peut-on en déduire relativement à la bande passante nécessaire ? Quelle sera donc l'opération indispensable à réaliser ?

1.2 Codage 2B1Q-NRZ

Dans le même contexte que précédemment, et avec la même source numérique binaire d'information, on a l'idée de réaliser le même type de codage, mais appliqué, non pas à chaque symbole, mais à chaque doublet de symboles (ce nouveau code se nomme 2B1Q-NRZ, comme "2 binaires - 1 quaternaire").

1. Définir un exemple de choix de valeurs b_k (un symbole b_k quaternaire représentera un doublet de bits de la source numérique binaire). Représenter à nouveau un tel signal $x_q(t)$ en fonction du temps :
$$x_q(t) = \sum_k b_k g(t - kT)$$
2. Exprimer la nouvelle densité spectrale de puissance $S_{x_q x_q}(f)$ et la comparer à la précédente.
3. Que peut-on en déduire et quel est l'intérêt d'un tel codage ?
4. Pourrait-on étendre ce principe à un codage appliqué sur un grand nombre de bits consécutifs ? Quel phénomène limitera la valence du système ?

Sujet 2 : Transmission sur canal bruité

Nous considérons la transmission d'une séquence binaire par un codage en ligne (en bande de base) sur un canal à bande non limitée. Le bruit considéré est un bruit blanc gaussien de densité spectrale de puissance $\Gamma_n(f) = N_0/2$.

Le codage considéré est le code Manchester : $a_k = \pm 1$, et

$$g(t) = \begin{cases} -V & \text{pour } 0 \leq t < T/2 \\ V & \text{pour } T/2 \leq t < T \end{cases}$$

2.1 Filtre adapté

1. Quelle est l'expression de E_b , l'énergie moyenne par bit ?
2. Le filtre de réception adapté est $g_r(\tau) = A \cdot g(t_0 - \tau)$. Déterminer l'expression du filtre adapté pour le code de Manchester (on choisira t_0 de sorte que le filtre de réception soit *causal*).

Le signal reçu est

$$y(t) = \sum a_k g(t - kT) + n(t)$$

L'estimation des symboles émis est faite en échantillonnant $r(t)$, le signal à la sortie du filtre de réception, aux instants $t_0 + nT$

$$r(t) = \sum a_k h(t - kT) + b(t)$$

3. Quelle est l'expression de $h(t)$?

2.2 Probabilité d'erreur

On montre que, lorsqu'il y a adaptation, la probabilité d'erreur est fonction du quotient E_b/N_0 .

1. Quelle est l'unité de N_0 ? Quelle est la puissance du bruit sur une bande de fréquence de largeur W ?
2. Rappeler l'expression de la probabilité d'erreur en fonction du quotient E_b/N_0 , pour un codage bivalent antipolaire ($a_k = \pm 1$).
3. Que vaut l'expression du quotient E_b/N_0 en fonction de V , N_0 , D ? Conclure sur l'influence du débit sur la probabilité d'erreur binaire.
4. Déterminer P la puissance d'émission en fonction de D et E_b . On mesure $N_0 = 4 \times 10^{-21} \text{ W/Hz}$, évaluer la puissance minimale P_{min} à émettre pour un débit binaire $D = 34 \text{ Mbits/s}$ garantissant une probabilité d'erreur $P_e \leq 10^{-4}$.

	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.30	0.00114	0.00109	0.00103	0.00098	0.00094	0.00089	0.00085	0.00080	0.00076	0.00072
2.40	0.00069	0.00065	0.00062	0.00059	0.00056	0.00053	0.00050	0.00048	0.00045	0.00043
2.50	0.00041	0.00039	0.00037	0.00035	0.00033	0.00031	0.00029	0.00028	0.00026	0.00025
2.60	0.00024	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00018	0.00017	0.00016	0.00015	0.00014
2.70	0.00013	0.00013	0.00012	0.00011	0.00011	0.00010	0.00009	0.00009	0.00008	0.00008
2.80	0.00008	0.00007	0.00007	0.00006	0.00006	0.00006	0.00005	0.00005	0.00005	0.00004

TABLE 2.1 – Valeurs de la fonction erreur complémentaire

Sujet 3 : Canal à bande limitée en bande de base

Nous étudions une transmission en bande de base sur un canal à bande limitée. Le filtrage opéré par le canal a pour effet la création d'une interférence entre symboles (IES). A la sortie du canal le signal reçu $r(t)$ est tel qu'à l'instant d'échantillonnage $t_1 + nT$, $r(t_1 + nT)$ ne dépend pas uniquement de a_n mais vaut

$$r(t_1 + nT) = a_n h(t_1) + \sum_{k \neq 0} a_{n-k} h(t_1 + kT)$$

où $h(t)$ est l'expression du formant $g(t)$ filtré par le canal. En effet, à l'entrée du canal le signal codé a pour expression :

$$x(t) = \sum_m a_m g(t - mT)$$

3.1 Filtrage passe-bas du premier ordre

Nous étudions empiriquement ce phénomène pour un signal codé NRZ ($a_k \in \{-1, 1\}$ et $g(t) = V$ pour $0 \leq t \leq T$) et un canal modélisé par un filtre passe-bas du premier ordre (dont la fréquence de coupure vaut $\omega_c = \frac{1}{\tau}$).

1. Tracer $h(t)$, la forme d'onde (ou le formant, ici un créneau) filtrée par un filtre passe-bas du premier ordre, pour différentes valeurs de τ .
 - (a) $\tau \ll T$
 - (b) $\tau \simeq T$
 - (c) $\tau \gg T$
2. Représenter le signal $r(t)$ pour ces différentes valeurs de τ .
3. Que devient le filtrage du signal $x(t)$ dans le cas $\tau \gg T$? En quoi s'agit-il d'une interférence entre symboles? Transposer la relation $\tau \gg T$ dans le domaine fréquentiel (rappel : $R = \frac{1}{\tau}$).

3.2 Filtrage passe-bas idéal

Nous étudions le même signal NRZ binaire. Le canal est cette fois modélisé par un filtre passe-bas idéal. L'ensemble codeur – canal – filtre de réception a pour transformée de Fourier $H(f) = A \cdot \Pi(f/(2f_c))$.

1. Déterminer l'expression de $h(t)$.

Le signal reçu qui permettra de déterminer (*estimer*) le symbole émis est

$$r(t) = \sum a_k h(t - kT)$$

avec $\hat{a}_n = r(n \cdot T)$.

2. Quelle est l'expression de $\hat{a}_n$ (en fonction de $h(t)$ et de la suite (a_k))?
3. Donner une valeur de f_c , minimale, permettant l'annulation de l'IES.
4. Rappeler l'expression du premier critère de Nyquist dans le domaine fréquentiel. Montrer que $H(f)$ le vérifie.

Sujet 4 : Modulation numérique, multiplexage

4.1 Constellation

La modulation permet de réaliser une transmission numérique sur voie hertzienne en transposant le spectre du signal numérique autour d'une fréquence porteuse dans une bande de fréquence étroite allouée. L'ensemble fréquence-bande se nomme canal hertzien.

1. Donner l'expression d'une porteuse de fréquence f_0 modulée en amplitude par un signal $x(t)$ ou en phase par un signal $y(t)$.
2. Montrer qu'un signal $s(t)$ modulé en amplitude par le signal $x(t)$ et simultanément en phase par le signal $y(t)$ peut s'écrire comme étant un signal modulé en quadrature, c'est-à-dire

$$s(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

3. Dans le cadre d'une transmission numérique, montrer que si l'on considère que $I(t)$ et $Q(t)$ peuvent prendre un nombre fini de valeurs, les couples I/Q peuvent représenter des n -uplets de bits. Représenter ces différents états sur un diagramme I/Q . Cette représentation se nomme la *constellation*.
4. Sachant que $I(t)$ et $Q(t)$ sont constants sur une période T_s , quel est le débit binaire D de la transmission en fonction de M le nombre de points de la constellation (la *valence*) et $R = 1/T_s$ (la *rapidité de modulation*) ?
5. Représenter sur la constellation la perturbation apportée par un bruit additif.
6. La rapidité de modulation est limitée par la bande de fréquence allouée. Quelle est la limitation dans l'augmentation du débit par l'augmentation de la valence ?
7. Etablir un schéma fonctionnel de modulation.
8. En écrivant $s(t) = I(t) \cos(2\pi f_0 t) - Q(t) \sin(2\pi f_0 t)$, établir un processus de démodulation et en faire le schéma fonctionnel.¹

4.2 Multiplexage fréquentiel inverse

On considère un canal physique (paire de conducteurs cuivre) de bande passante utilisable $[0 - 1 \text{ MHz}]$, mais pouvant présenter des irrégularités spectrales de transmission ("trous", perturbations ponctuelles, grandes différences d'atténuation, ...). De manière à pouvoir quand même utiliser ce support avec un débit maximal, on divise la bande passante en 256 canaux fréquentiels de largeur 4.3 kHz chacun (principe de l'*ADSL*) avec la répartition suivante :

- canaux 1 à 6 : téléphonie classique (analogique ou RNIS),
- canaux 7 à 31 : données numériques "montantes",
- canaux 32 à 256 : données numériques "descendantes".

Sachant que, pour les données, on applique une modulation QAM de 2 à 512 états et en considérant un filtrage optimal tel que l'émission d'un état par seconde occupe 1 Hz, en déduire les débits maximum et minimum pour les données "descendantes".

1. Ecrire $\cos^2(2\pi f_0 t) = 1 - \sin^2(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi f_0 t))$, $\cos(2\pi f_0 t) \cdot \sin(2\pi f_0 t) = \frac{1}{2} \sin(4\pi f_0 t)$