

30/11/12

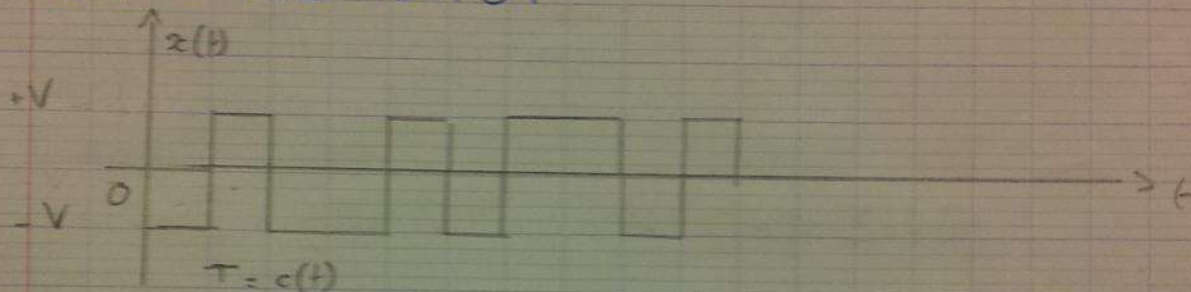
Communication
Numérique

TD1 : Codage numérique en bande de base

I - Codage NRZ

Le signal reste constant pendant la transmission d'un symbole.
Suite numérique binaire aléatoire :

dk : 0100101101



La moyenne du signal $x(t)$ vaut 0.

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} x(t) dt \xrightarrow{\Delta t \rightarrow \infty} 0$$

$$E(x(t_0)) = 0$$

$\frac{1}{T}$ débit symbole (débit binaire).

$$D = \frac{1}{T} \text{ débit binaire en bit/s}$$

$$R = \frac{1}{T} \text{ fréquence de modulation en hertz (s}^{-1}\text{)}.$$

Transformée de Fourier :
$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt$$

Transformée de Fourier inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{i 2 \pi f t} df \quad . \quad (\text{On a divisé par } 2\pi^2 \text{ et changé le signe de l'exponentielle}).$$

Définition du produit scalaire :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^m u_i v_i \quad . \quad \text{La somme du produit des composantes.}$$

$$\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m \quad \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

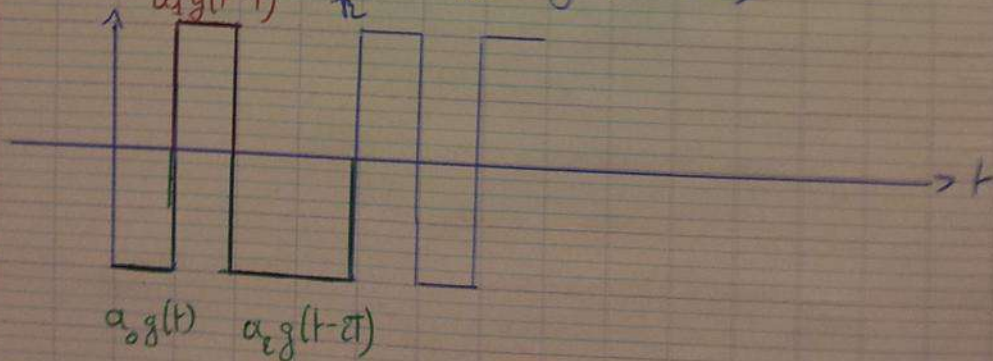
$$\vec{u} = \sum a_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad a_j = \langle \vec{u}, \vec{e}_j \rangle = \sum a_i (\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle) = a_j$$

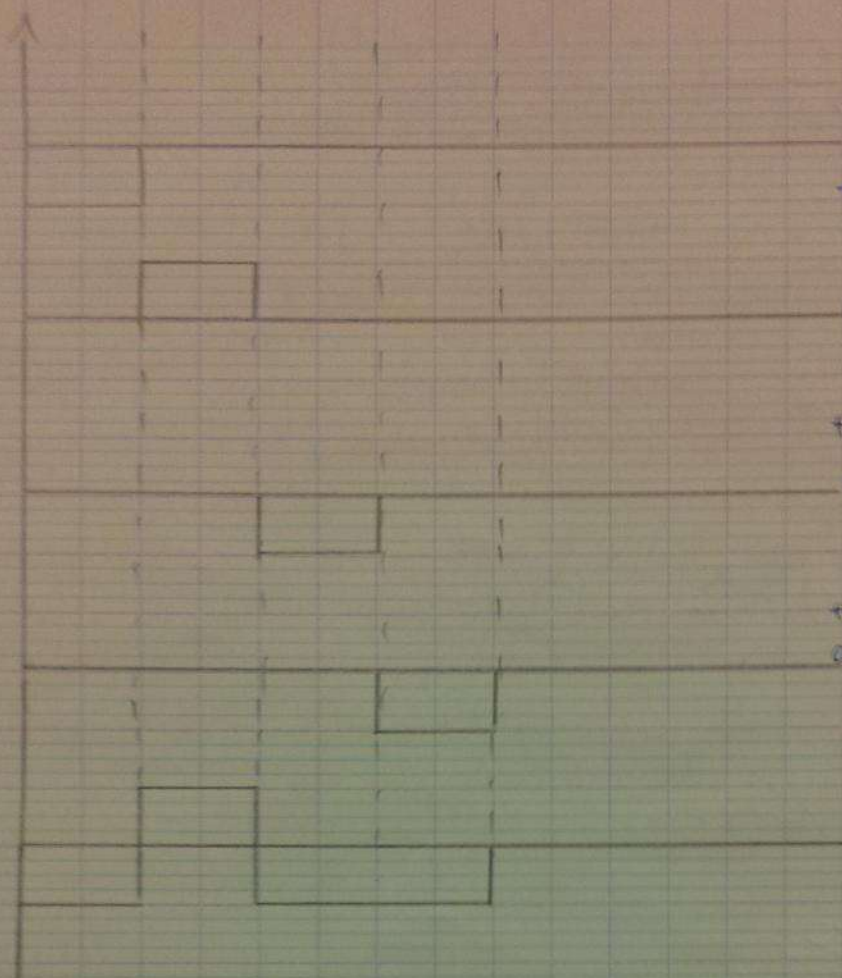
Calcul de la Transform

On ne peut pas calculer la transformée de Fourier de $x(t)$ car $x(t)$ est aléatoire. On doit calculer la DSP (Densité Spectrale de Puissance) de $x(t)$.

L'unité de la DSP est Watt/Herz.

$$2) \quad x(t) = \sum_k a_k \cdot g(t - kT)$$





$$a_0 g(t), a_0 = -1$$

+

$$a_1 g(t+T), a_0 = 1$$

+

$$a_2 g(t-2T), a_0 = -1$$

+

$$a_3 g(t-3T), a_0 = -1$$

$$S_{xx}(f) = |G(f)|^2 \left[\frac{\sigma^2 a}{T} + \frac{m a^2}{T} \sum \delta \left(f - \frac{n}{T} \right) \right]$$

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot e^{-2\pi j f t} dt \text{ car } g(t) \text{ est nul en dehors de cet interval.}$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} V \cdot e^{-2\pi j f t} dt$$

$$= \left[\frac{V}{-2\pi j f} \times e^{-2\pi j f t} \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{V}{2\pi j f} \left(e^{2\pi j f \frac{T}{2}} - e^{-2\pi j f \left(\frac{T}{2} \right)} \right)$$

$$e^{j\theta} = \cos(\theta) + j \sin(\theta)$$

$$e^{-j\theta} = \cos(\theta) - j \sin(\theta)$$

$$= \frac{V}{+2\pi j f} \left(e^{+j\pi f T} - e^{-j\pi f T} \right)$$

$$= \frac{j 2 \sin(\pi f T) \times V}{+2\pi j f} = \frac{\sin(\pi f T) \times V}{\pi f}$$

$$= VT \cdot \text{sinc}(\pi f T) = G(f)$$

$$E(Y) = \sum y_i P\{Y=y_i\}$$

$$= \sigma_y^2 = E\left([Y - E(Y)]^2\right)$$

$$E\left(Y^2 - 2YE(Y) + E(Y)^2\right) = E(Y^2) - E(Y)^2$$

$$\begin{aligned} E(A_k) &= -1 \times P(A_k = -1) + 1 \times P(A_k = 1) \\ &= -1 \times 0,5 + 1 \times 0,5 \\ &= 0 = m_A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(A_k^2) &= (-1)^2 \times 0,5 + (1)^2 \times 0,5 \\ &= 0,5 + 0,5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$E(A_k^2) - E(A_k)^2 = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{aligned} S_{xx}(f) &= |G(f)|^2 \left(\frac{\sigma_A^2}{T} + \frac{m_A^2}{T^2} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \right) \\ &= \frac{V^2 T^2 \text{sinc}^2(\pi f T)}{T} \\ &= V^2 \cdot T \cdot \text{sinc}^2(\pi f T) \end{aligned}$$

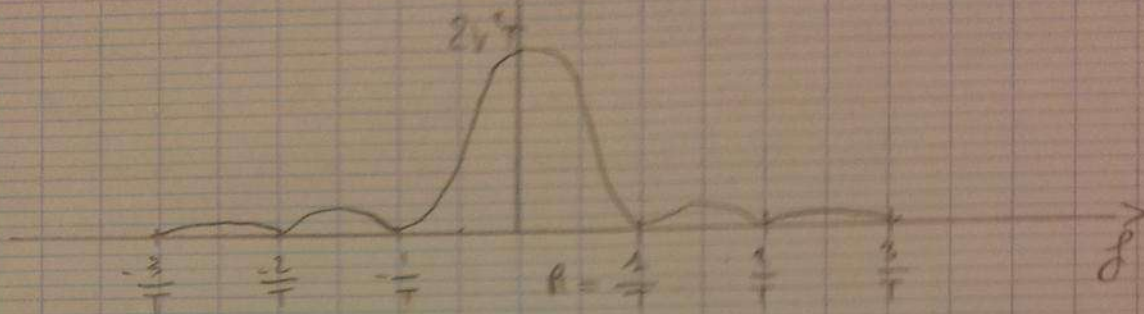
30/11/12

T01

Com Num

$$\text{sinc}(\pi f T) = 0 \text{ quand } \pi f T = \pi \rightarrow f T = 1 \rightarrow f = \frac{1}{T}$$

$\uparrow$ $\text{Sxx}(f)$



06/12/12

$$R = \frac{1}{T} \text{ (Rapidité de modulation)}$$

$$\frac{1}{T} = \text{Débit symbole}$$

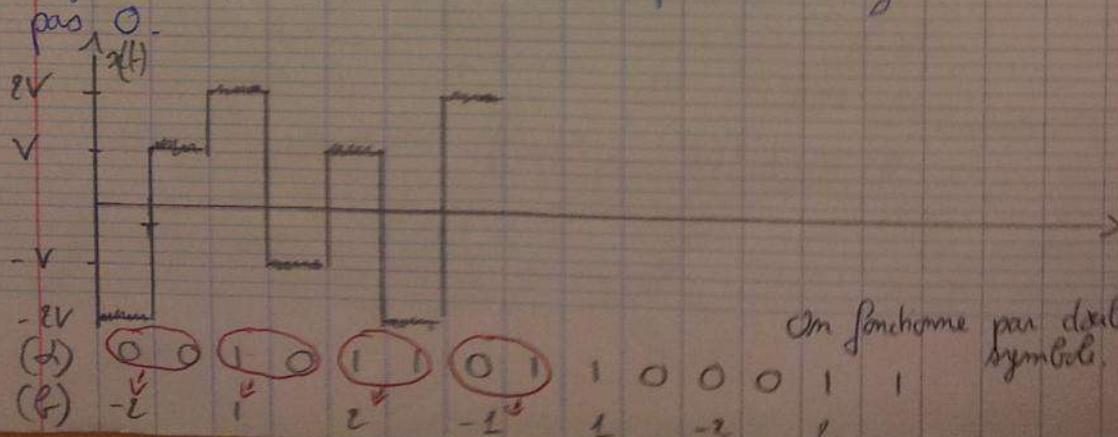
$$D = \frac{L}{T}$$

$$\text{Débit binaire} = \text{Débit symbole} \times \text{nb de bit/symbole}$$

Exercice 2 - Codage B2Q - NRZ

d_{2k}	d_{2k+1}	B_k
0	0	-3
0	1	-1
1	0	1
1	1	3

Signal antipolaire admet des valeurs positives et négatives mais n'admet pas 0.



On fonctionne par doublet de symbole.

2

Si le bruit est supérieur à 0,5V. Quand on fait l'estimation on peut confondre un EV avec un 15V.

On va séparer de EV chaque niveau qui représente un symbole. Ainsi, on aura une équiprobabilité d'erreur pour chaque symbole. Donc les niveaux sont -3V, -1V, 1V et 3V.

d_{10}	d_{01}	θ
0	0	-3
0	1	-1
1	1	1
1	0	3



$$x(t) = \sum_p \theta_p \cdot g(t - pT)$$

$$E_{\text{SMA}} x_p(f) = |G(f)|^2 \left\{ \frac{G_B^2}{T} + \frac{m_B^2}{T^2} \sum \delta(f - \frac{p}{T}) \right\}$$

$$E(\theta^2) = -3 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = 0$$

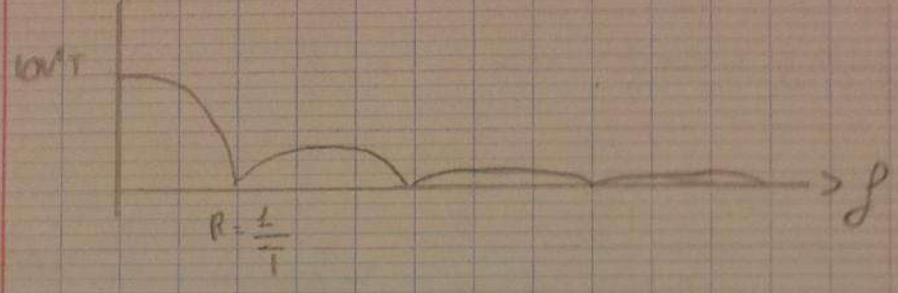
$$E(\theta^4) = 9 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = 5$$

$$G_B^2 = E(\theta^4) - (E(\theta^2))^2 = 5 - 0 = 5$$

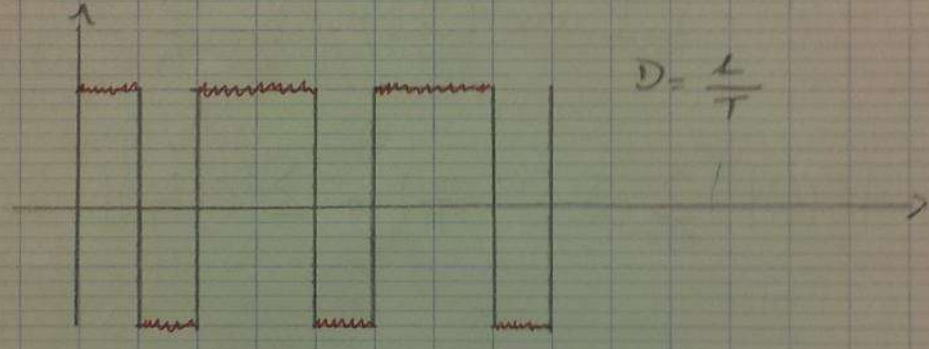
06/12/12

Tit
Com. Num

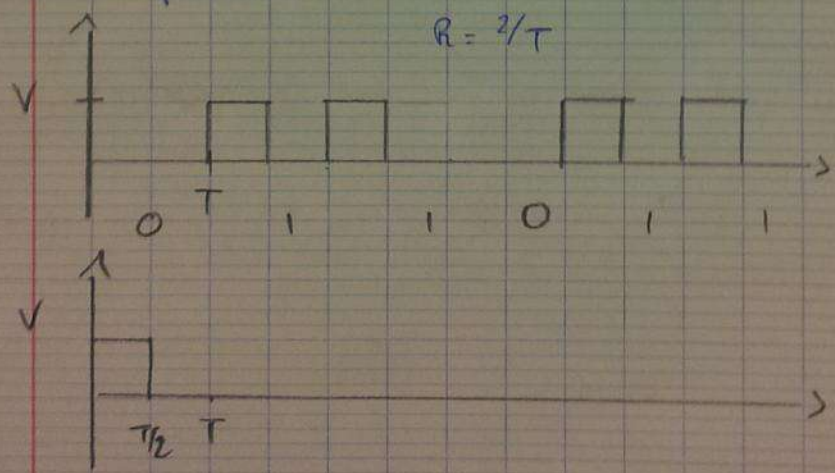
$$S_{\text{req}} = |G_f|^2 \cdot \frac{5}{T} = 5V^2 T \text{sinc}^2(\pi f T)$$



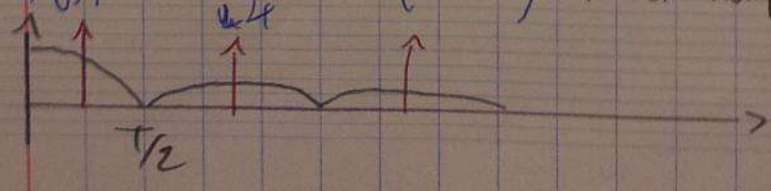
A puissance égale & signal de l'exercice 1. La probabilité d'erreur serait plus grande ici. En effet, on devrait $V \rightarrow \frac{V}{\sqrt{5}}$ et donc l'écart entre deux niveaux de Volence serait plus petit !
Donc proba d'erreur $\nearrow$.



RZ unipolaire



$$|G_f|^2 = \frac{V^2 T^2}{4} \text{sinc}^2(\pi f T/2) \quad \text{On remplace } T \text{ par } T/2.$$



$$E(P) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$E(P^2) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$C_P = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

Formule de Betnet simplifiée :

$$S_{eq}(f) = \frac{V^2 T}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f P T}{2}\right) = \frac{1}{4 T^2} |G(f)|^2 \sum_p \delta\left(f - \frac{p}{T}\right)$$

$$= \frac{V^2 T}{16} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{f P T}{2}\right) + \frac{V^2}{16} \sum_m \operatorname{sinc}^2\left(\frac{m T}{2}\right) \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

$$|G(f)|^2 \sum_m \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) = \sum |G\left(\frac{m}{T}\right)|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

3) Je peut augmenter le débit linéaire sans ~~ou~~ augmenter l'occupation spectrale.

4) La proba d'erre avec la valence.