

Seules les notes de cours, de T.D. et les calculatrices sont autorisées

Attention ! Le but n'est pas de résoudre les exercices "avec les mains" (par exemple, par une énumération exhaustive des solutions), mais d'utiliser des techniques permettant la résolution sur ordinateur de problèmes de dimensions bien supérieures. Il est rappelé également que la rédaction doit permettre au correcteur de suivre le déroulement des algorithmes.

Barème donné à titre indicatif (modification ultérieure possible) : les exercices seront notés de façon sensiblement équivalente.

Exercice 1 : problème d'ordonnancement.

On considère un problème d'ordonnancement comportant 8 tâches notées de "a" à "h". Les contraintes d'antériorité et les durées des tâches sont données dans le tableau suivant :

tâches	a	b	c	d	e	f	g	h
tâches antérieures	e	c,e	-	b,c,g	-	c,h	a	-
durée en mois	3	15	3	2	4	21	16	5

1. Construire le graphe **PERT** (méthode des potentiels-étapes) du projet (*attention, si la copie présente un graphe MPM au lieu d'un graphe PERT, l'exercice ne sera pas corrigé*). On réduira au minimum le nombre d'arcs fictifs dans ce graphe. Déterminer la durée du projet, le chemin et les tâches critiques, les dates au plus tôt et au plus tard des étapes, les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches, et enfin les marges totales, libres et certaines des tâches.
2. Comment modifier le graphe obtenu pour prendre en compte les nouvelles contraintes :
 - la tâche f peut commencer lorsque la tâche h est réalisée au 3/5,
 - la tâche a débute au plus tôt 5 mois après le début du projet ?On demande simplement de donner les étapes et arcs du nouveau graphe en expliquant leur construction mais sans recalculer les nouvelles dates des étapes.

Exercice 2 : problème de transport.

On considère un problème de transport à 3 sources et 4 destinations dont les coûts de transport c_{ij} sont donnés dans le tableau suivant :

	1	2	3	4
1	12	3	5	7
2	14	4	17	9
3	15	8	7	3

Ainsi transporter 1 tonne de produit entre la source 1 et la destination 2 coûte 3 k€, transporter 1 tonne entre la source 2 et la destination 4 coûte 9 k€... Les quantités de produit disponibles aux sources 1, 2, 3 sont 50, 80 et 40 respectivement. Les quantités demandées aux destinations 1, 2, 3, 4 sont 30, 70, 40 et 30 respectivement. On cherche à déterminer les quantités x_{ij} de produit transporté des sources i aux destinations j de façon à minimiser la somme des coûts de transport.

1. Chercher une solution de base en utilisant soit la méthode du coin Nord-Ouest, soit la méthode de la différence maximale (Balas-Hammer). On vérifiera de deux façons différentes que la solution obtenue est une solution de base. Donner le coût global de la solution obtenue.
2. A partir de la solution obtenue à la question précédente, déterminer une solution optimale par la méthode du stepping-stone. On donnera le plan de transport optimal ainsi que le coût total minimum obtenus.

Exercice 3 : problème de file d'attente.

A un poste de contrôle des douanes le nombre moyen λ de voyageurs se présentant par heure est de 20. Le temps moyen nécessaire à l'accomplissement des formalités est de $1/\mu = 7$ minutes 30 secondes par voyageur. On admet que les arrivées constituent un phénomène de Poisson de paramètre λ et que la durée des services obéit à une loi exponentielle de paramètre μ .

1. Combien de douaniers sont-ils nécessaires pour éviter tout engorgement du trafic ? (ici encore, le résultat ne suffit pas, il faut le démontrer)
2. L'administration étudie la mise en place d'un service proportionnel au nombre de voyageurs ; ainsi, le nombre de personnes N dans le système d'attente constitue un processus stochastique de naissance et mort avec des probabilités de transition :

$$P(N = n+1 \text{ à } t+\Delta t \mid N = n \text{ à } t) = \lambda_n \Delta t = \lambda \Delta t, \text{ soit } \lambda_n = \lambda$$

$$P(N = n-1 \text{ à } t+\Delta t \mid N = n \text{ à } t) = \mu_n \Delta t = n \mu \Delta t, \text{ soit } \mu_n = n \mu$$

Montrer qu'en régime permanent, la probabilité p_n qu'il y ait n voyageurs en attente au poste s'écrit

$$p_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

avec $\lambda = 20$ et $\mu = 8$ voyageurs par heure. Pour cela on écrira le diagramme des transitions des états du processus entre les instants t et $t + \Delta t$, puis on utilisera le théorème des coupes.

3. Calculer le nombre moyen de personnes en attente au poste.
4. Le nombre de douaniers exécutant ce service proportionnel au nombre de clients est limité à 5. Quelle est la probabilité que le chef de brigade (qui ne fait pas partie des cinq précédents) doive participer au service ?

Observation:

16/06

2006

20

17/20
11/11

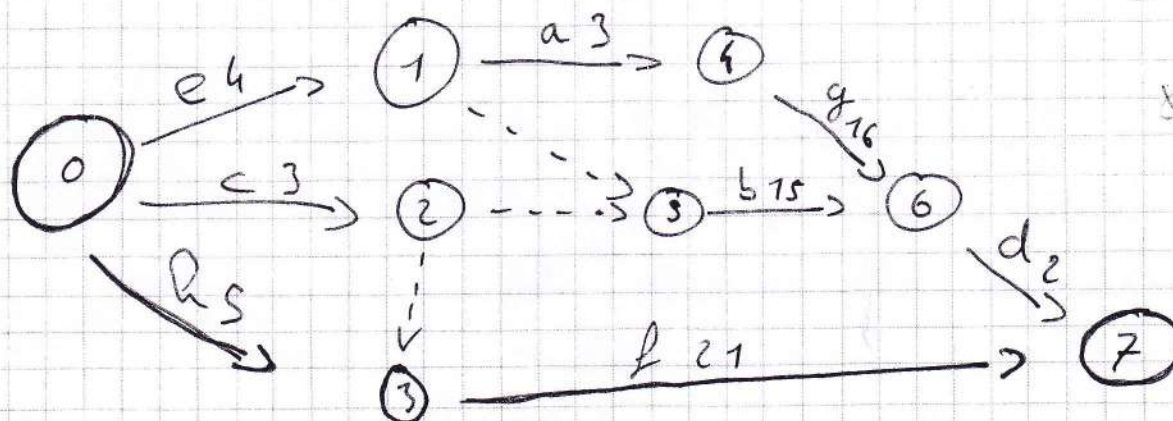
Exercice 1:

①

tâches	durée	tâches antérieures	
a	3	e	+
b	15	c, e	- -
c	3	-	-
d	2	b, f, g	c, e, -, a
e	4	-	-
f	21	c, h	- -
g	16	a	e
h	5	-	-



Range?
des graphes?
graphe avec dates?



— chemin critique

dates au plus tôt:

Durée du projet : 26 mois

0	1	2	3	4	5	6	7
0	4	3	5	7	4	23	26
0 0.4	0 0.3	0 0.5	4 1.3	4 1.0	7 4 16	23 6.2	
		3 2.0		3 2.0	4 5 15	53.21	

dates au plus tard:

0	1	2	3	4	5	6	7
0	5	5	15	8	9	24	26
5 1.4	8 4.3	9 5.0	26 7.21	24 6.16	24 6.15	26 7.2	
5 2.3	9 5.0	5 3.0					
5 3.5							

calendrier des tâches:

Durée du projet?

tâches critiques
f et h

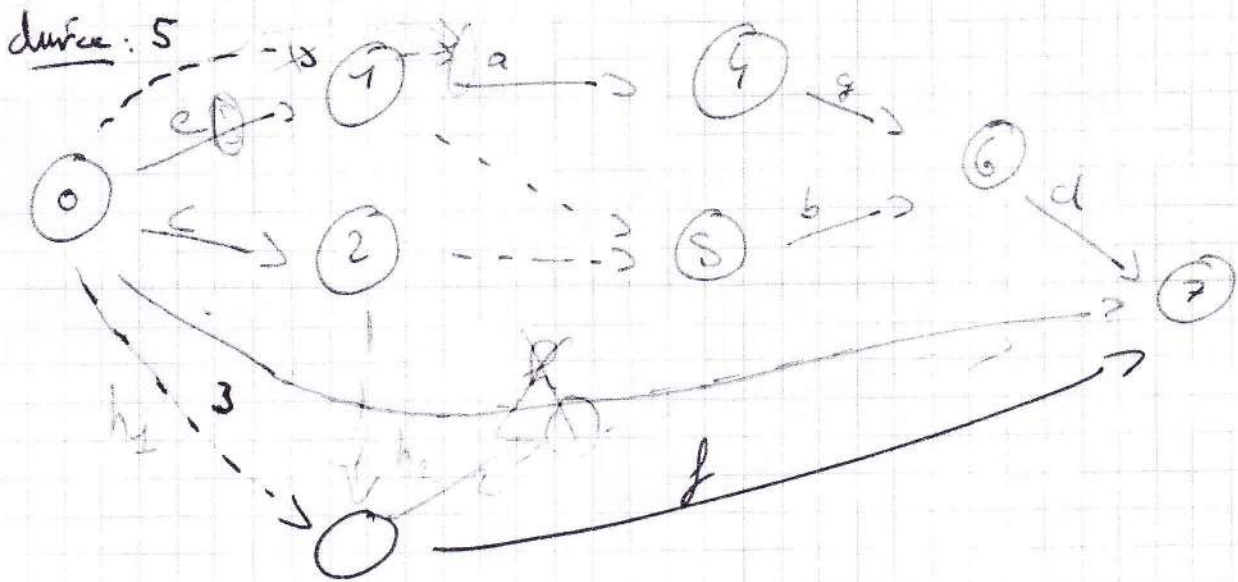
	a	b	c	d	e	f	g	h
T_x	4	4	0	23	0	5	7	0
T_x^*	5	9	2	24	1	5	8	0
M_x	1	5	2	1	1	0	1	0
m_x	0	4	0	1	0	0	0	0
μ_x	0		0			0	0	0

Sommet fictif calculé (cf. cours)

- ② . $f \rightarrow \frac{3}{5} h$ donc f peut commencer $\frac{3}{5}$ de la durée de h après que l'étape qui remplace les conditions de celle-ci soit valide.
- $a \rightarrow 5$ mois après le début
 $\Rightarrow$ nouvel arc fictif de ① à l'étape avant a

Il n'est pas autorisé à commencer 5 mois après le début

3



h est une tâche critique donc elle commence dès le début (à $t=0$). On relie donc l'arc $f: 5 \rightarrow 6$ directement à 0.

6/11

exercice 2:

① méthode

du Coin

Nord-Ouest:

	1	2	3	4	quantité
1	30	20	0	0	50 20 0
2	0	50	30	0	80 30 0
3	0	0	10	30	40 30 0
Offre: Σ demande	30	20	40	30	
	0	50	10	0	
		0	0		

Verification: $(4-1)(3-1) = 3 \times 2 = 6$

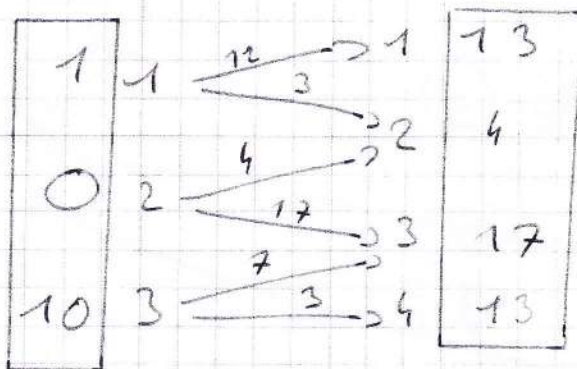
on a bien 6 arcs $\Rightarrow$ solution de base.

On obtient un graphe connexe sans cycle donc solution de base.

coût global = $30 \times 12 + 20 \times 2 + 50 \times 4 + 30 \times 17 + 10 \times 7 + 30 \times 3 = 1210 \text{ €}$

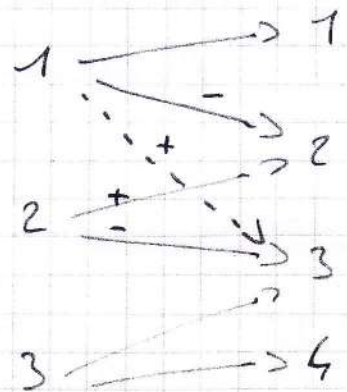
②

plan de transport:



recherche des coûts marginaux:

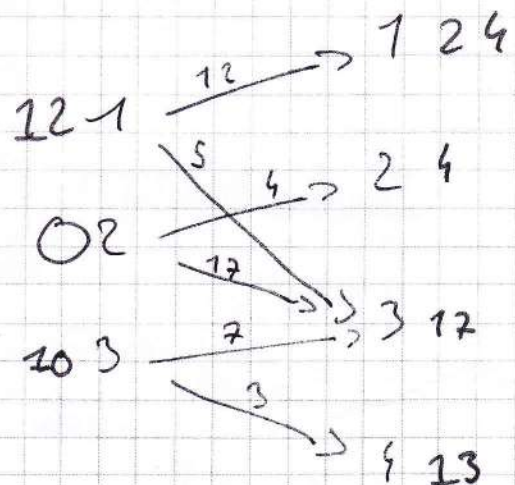
	1	2	3	4	
1	(30)	(20)	~~(-9)~~ 5	-5	1
2	14	(50)	(30)	-4	0
3	12	14	(10)	(30)	10
	13	4	17	13	



max transportable = 20

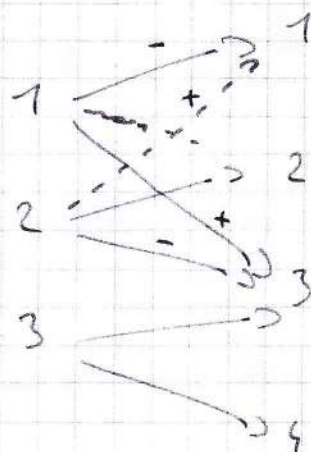
nouveau tableau:

	1	2	3	4
1	30	0	20	0
2	0	70	10	0
3	0	0	10	30



coût marginaux:

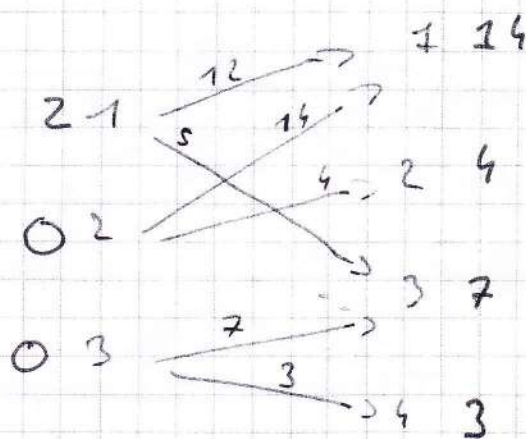
	1	2	3	4	
1	(30) 9	3	(20) 6	7	12
2	(10) 14	(70) 4	(10) 9		0
3	1 15	14 8	(10) 30		10
	24	4	17	13	



max transportable = 10

nouveau tableau:

	1	2	3	4
1	20	0	30	0
2	10	70	0	0
3	0	0	10	30



coût marginaux:

	1	2	3	4
1		1 3		6 7
2			10 17	6 9
3	1 15	4 8		
	14	4	7	3

Il n'y a plus de
coût marginaux négatifs.
Le système est donc optimal.

coût = $20 \times 12 + 30 \times 5 + 10 \times 14 + 70 \times 4 + 10 \times 7 + 30 \times 3 = 970 \text{ €}$

Exercice 3:

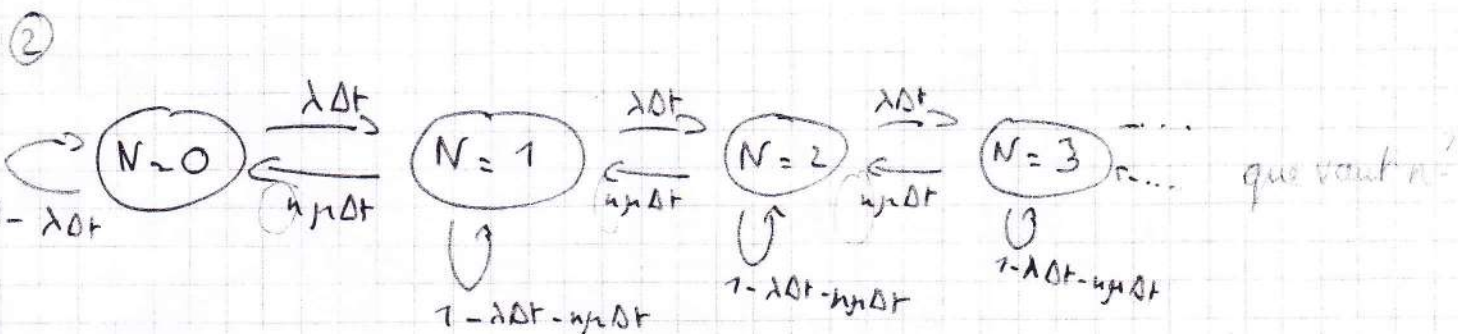
$$\textcircled{1} \quad \lambda = 20 \text{ voyageurs/h} = 20/60 : \\ = 0,33 \text{ voyageurs/min}$$

$$\frac{1}{\mu} = 7,5 \text{ min/voyageur}$$

m = nbre de douaniers.

$$m = \lambda \times \frac{1}{\mu} = 0,33 \times 7,5 = 2,5$$

soit il faut au minimum 3 douaniers.



Théorème des courbes:

$$P(\text{entrer dans la queue}) = P(\text{sortir de la queue})$$

$$P(N=0 \text{ à } t \text{ et } N=1 \text{ à } t+\Delta t) = P(N=1 \text{ à } t \text{ et } N=0 \text{ à } t+\Delta t)$$

$$P(N=1 \text{ à } t+\Delta t / N=0 \text{ à } t) \times P(N=0 \text{ à } t) = P(N=0 \text{ à } t+\Delta t / N=1 \text{ à } t) \times P(N=1 \text{ à } t)$$

$$\lambda \Delta t \times P_0 = \mu \Delta t \times P_1$$

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \dots$$

n varie
donnet-les
la valeur

Condition de normalisation

$$p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$$

$$p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{n\mu} + \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{n\mu} \right)^n \right) = 1$$

$$p_0 =$$

$$2,5/5$$