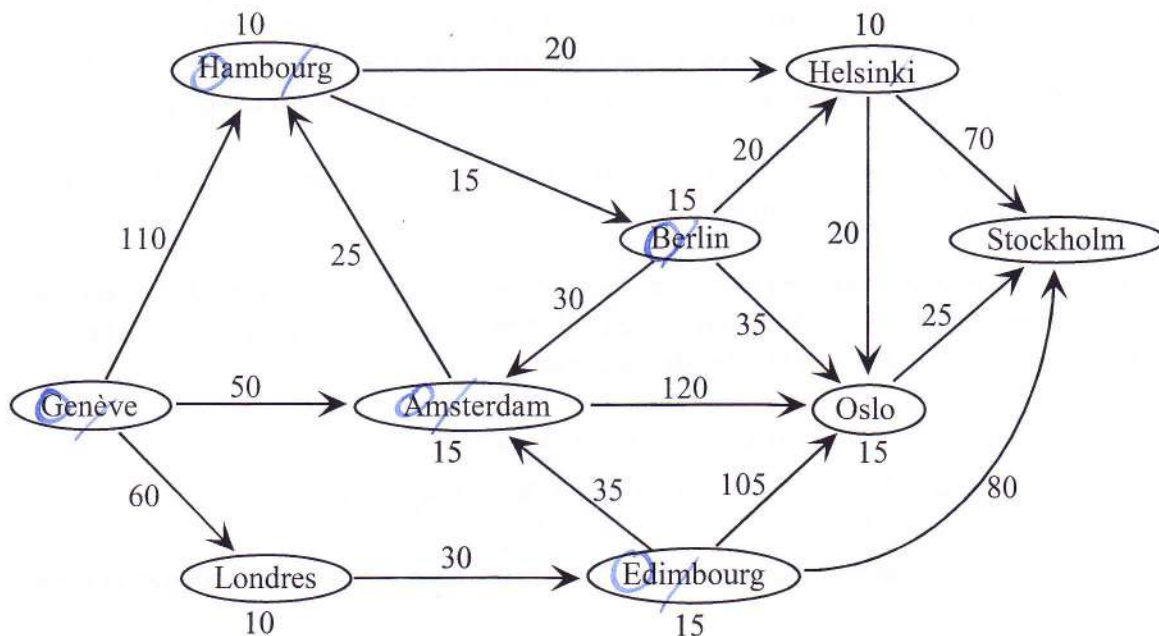


Seules les notes de cours, de T.D. et les calculettes sont autorisées
DUREE : 2 heures

Attention ! Le but n'est pas de résoudre les exercices "avec les mains" (par exemple, par une énumération exhaustive des solutions), mais d'utiliser des techniques permettant la résolution sur ordinateur de problèmes de dimensions bien supérieures. Il est rappelé également que la rédaction doit permettre au correcteur de suivre le déroulement des algorithmes.

Exercice 1 : Coût de transport minimal

Un étudiant genevois désirant passer quelques jours de vacances à ^{autre} Stockholm a recensé, après enquête auprès de plusieurs compagnies aériennes, les connexions lui permettant de se rendre de Genève à Stockholm. Il les a représentées sur le graphe suivant en notant sur chaque arc le coût en euros du billet d'avion. Les horaires des avions sont tels que l'étudiant est obligé de passer une nuit à l'hôtel à chaque étape : les valeurs du coût d'hébergement en euros sont reportées sur le graphe auprès de chaque sommet étape. L'étudiant ne disposant que d'un faible budget désire déterminer le chemin le moins onéreux pour se rendre de Genève à Stockholm.



- Déterminer la solution optimale de ce problème à l'aide de l'algorithme de Ford. Quel est le coût minimal et par quelles villes doit passer l'étudiant ?
- Un copain écossais lui a dit que le prix de l'hôtel à Edimbourg était négociable. Quel est le rabais minimum qu'il faut obtenir sur le prix de la chambre pour que le chemin optimal passe par Edimbourg et lui permette de voir son copain ?

Exercice 2.

On considère un problème d'ordonnancement comportant 10 tâches notées de "a" à "j". Les contraintes d'antériorité et les durées des tâches sont données dans le tableau suivant :

tâches	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
tâches antérieures	b,c,j	f	-	e	-	-	b,j	a,g	a,g	e
durée en mois	3	5	11	12	2	3	4	3	2	7

- a) Construire le graphe PERT (méthode des potentiels-étapes) du projet. On réduira au minimum le nombre d'arcs fictifs dans ce graphe. Il est impératif de donner les graphes intermédiaires de la construction.
- b) Déterminer la durée du projet, le chemin et les tâches critiques, les dates au plus tôt et au plus tard des étapes, les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches, et enfin les marges totales, libres et certaines des tâches.
- c) Comment modifier le graphe obtenu pour prendre en compte les nouvelles contraintes :
- la tâche f ne peut commencer que lorsque la tâche e est réalisée à moitié,
 - la tâche g peut commencer après que la tâche b a été réalisée au 3/5 (la tâche j est toujours antérieure à la tâche g) ?
- On demande simplement de donner les étapes et arcs du nouveau graphe sans recalculer les nouvelles dates des étapes.*

Exercice 3 : problème de file d'attente.

A un poste de contrôle des douanes le nombre moyen λ de voyageurs se présentant par heure est de 20. Le temps moyen nécessaire à l'accomplissement des formalités est de $1/\mu = 7$ minutes 30 secondes par voyageur. On admet que les arrivées constituent un phénomène de Poisson de paramètre λ et que la durée des services obéit à une loi exponentielle de paramètre μ .

1. Combien de douaniers sont-ils nécessaires pour éviter tout engorgement du trafic ? (ici encore, le résultat ne suffit pas, il faut le démontrer)
2. L'administration étudie la mise en place d'un service proportionnel au nombre de voyageurs ; ainsi, le nombre de personnes N dans le système d'attente constitue un processus stochastique de naissance et mort avec des probabilités de transition :

$$P(N = n+1 \text{ à } t+\Delta t \mid N = n \text{ à } t) = \lambda_n \Delta t = \lambda \Delta t, \text{ soit } \lambda_n = \lambda$$

$$P(N = n-1 \text{ à } t+\Delta t \mid N = n \text{ à } t) = \mu_n \Delta t = n \mu \Delta t, \text{ soit } \mu_n = n \mu$$

Montrer qu'en régime permanent, la probabilité p_n qu'il y ait n voyageurs en attente au poste

s'écrit

$$p_n = e^{-\lambda/\mu} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

avec $\lambda = 20$ et $\mu = 8$ voyageurs par heure. Pour cela on écrira le diagramme des transitions des états du processus entre les instants t et $t + \Delta t$, puis on utilisera le théorème des coupes.

3. Calculer le nombre moyen de personnes en attente au poste.
4. Le nombre de douaniers exécutant ce service proportionnel au nombre de clients est limité à 5. Quelle est la probabilité que le chef de brigade (qui ne fait pas partie des cinq précédents) doive participer au service ?