

L3 – Devoir de Recherche Opérationnelle – rattrapage 2009 (2 heures)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1 : problème de transport.

On considère un problème de transport à 3 sources et 4 destinations dont les coûts de transport c_{ij} sont donnés dans le tableau suivant :

	1	2	3	4
1	12	3	5	7
2	14	4	17	9
3	15	8	7	3

Ainsi transporter 1 tonne de produit entre la source 1 et la destination 2 coûte 3 k€, transporter 1 tonne entre la source 2 et la destination 4 coûte 9 k€... Les quantités de produit disponibles aux sources 1, 2, 3 sont 50, 80 et 40 respectivement. Les quantités demandées aux destinations 1, 2, 3, 4 sont 30, 70, 40 et 30 respectivement. On cherche à déterminer les quantités x_{ij} de produit transporté des sources i aux destinations j de façon à minimiser la somme des coûts de transport.

1. Chercher une solution de base en utilisant soit la méthode du coin Nord-Ouest.
2. Vérifier que la solution obtenue est une solution de base. $27 \times 12 + 14 \times 14 + 15 \times 4 + 15 \times 17 + 14 \times 7 + 13 \times 9$
3. Donner le coût global de la solution obtenue.
4. A partir de la solution obtenue à la question précédente, déterminer une solution optimale par la méthode du stepping-stone.
5. Donner le coût total minimum obtenus.

Exercice 2 : Processus de Markov.

Une étude statistique montre que dans la maternité d'une petite ville de province, en moyenne, quatre femmes arrivent par jour pour donner naissance à leur bébé, et que l'occupation moyenne d'une salle de travail est de six heures pour un accouchement.

La même étude montre que les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre λ et que le taux d'occupation de la salle de travail peut être décrit par une loi exponentielle de paramètre μ .

Le but est de déterminer le nombre N de salles de travail que doit compter la maternité (et donc le nombre de sages-femmes devant se trouver à la maternité) de telle sorte que la probabilité que toutes les salles soient occupées simultanément soit inférieure à 1/100.

1. Déterminer les valeurs numériques de λ et μ . Quelles sont les unités de ces paramètres ?

2. Montrer que ce système d'attente peut être décrit par un processus de naissance et de mort comportant $N+1$ états numérotés de 0 à N .
3. Tracer le graphe des transitions et valuer les arcs.
4. La probabilité que le système soit, en régime permanent, dans l'état E_k est notée p_k^* ($k \in \llbracket 0 \dots N \rrbracket$). Calculer p_k^* en fonction de p_0^* , puis calculer p_0^* .
5. Quel est l'état pour lequel toutes les salles sont occupées ? Quelle est sa probabilité ?
6. En prenant $N = 2$, puis 3, puis 4, ... déterminer le nombre de salles de travail que devra comporter la maternité de sorte que la probabilité qu'elles soient toutes occupées soit inférieure à $1/100$.

Exercice 3 : question de cours / TD.

La demande d'un équipement important en janvier, février et mars est de 2 unités, les 2 unités étant livrées à la fin de chaque mois. Le fabricant souhaite établir le plan de production de cet équipement.

Le stock ne peut dépasser 2 unités en février et mars, et est nul en janvier et avril. La production maximale pour un mois donné est de 4 unités. Pour un stock de i équipements et une production de y équipements, le coût mensuel vaut $c(y,i) = f(y) + 6i$ avec $f(0) = 0, f(1) = 15, f(2) = 17, f(3) = 19, f(4) = 21$.

Déterminer le plan de production de coût minimal en utilisant la programmation dynamique.