

L3 – Devoir de Recherche Opérationnelle – mai 2009

(2 heures)

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Attention ! Le but n'est pas de résoudre les exercices "avec les mains" (par exemple, par une énumération exhaustive des solutions), mais d'utiliser des techniques permettant la résolution sur ordinateur de problèmes de dimensions bien supérieures.

Exercice 1 : problème d'ordonnancement.

On considère un problème d'ordonnancement comportant 8 tâches notées de "a" à "h". Les contraintes d'antériorité et les durées des tâches sont données dans le tableau suivant :

tâches	a	b	c	d	e	f	g	h
tâches antérieures	e	c,e	-	b,c,g	-	c,h	a	-
durée en mois	3	15	3	2	4	21	16	5

1. Construire le graphe **PERT** (méthode des potentiels-étapes) du projet. On réduira au minimum le nombre d'arcs fictifs dans ce graphe. Déterminer la durée du projet, le chemin et les tâches critiques, les dates au plus tôt et au plus tard des étapes, les dates de début au plus tôt et au plus tard des tâches, et enfin les marges totales, libres et certaines des tâches.
2. Comment modifier le graphe obtenu pour prendre en compte les nouvelles contraintes :
 - la tâche f peut commencer lorsque la tâche h est réalisée au 3/5,
 - la tâche a débute au plus tôt 5 mois après le début du projet ?On demande simplement de donner les étapes et arcs du nouveau graphe en expliquant leur construction mais sans recalculer les nouvelles dates des étapes.

Exercice 2 : problème d'optimisation.

Trois équipes de chercheurs A, B, C travaillent indépendamment sur un même projet en utilisant des approches différentes. Chaque équipe a la probabilité d'échec suivante : $p_A = 0,4$, $p_B = 0,6$ et $p_C = 0,8$. Montrer que la probabilité d'échec du projet d'ensemble vaut 0,192.

On décide d'affecter 3 nouveaux chercheurs au projet dans le but de minimiser la probabilité d'échec du projet. Pour décider de l'affectation des chercheurs supplémentaires, on a établi le tableau suivant donnant la probabilité d'échec p_A , p_B , p_C de chaque équipe en fonction du nombre n de chercheurs supplémentaires :

n	P _A	P _B	P _C	
0	0,4	0,6	0,8	0,192
1	0,2	0,4	0,6	0,48
2	0,15	0,2	0,5	0,600
3	0,1	0,09	0,3	0,0027
	<u>0,18</u>			..

Déterminer, par la méthode de la programmation dynamique, l'affectation optimale des chercheurs supplémentaires de façon à minimiser la probabilité d'échec du projet d'ensemble. Donner la probabilité minimum.

Remarques : 1) on demande de tracer un graphe permettant de visualiser le problème.

2) les calculs sont expressément demandés, ils doivent mettre en évidence le principe et l'intérêt de la méthode.

Exercice 3 : processus de Markov.

Soit un processus de Poisson de taux λ .

1. Quelle est la probabilité pour que n évènements se produisent entre 0 et t ? entre t et 2t ? commenter ces résultats.
2. a. Quelle est la probabilité pour qu'un évènement se produise entre t et t+ Δt ?
b. Quelle est la probabilité pour qu'aucun évènement ne se produise entre t et t+ Δt ?
c. Quelle est la probabilité pour deux évènements se produisent entre t et t+ Δt ?
3. Calculer le nombre moyen d'évènements se produisant entre 0 et t ainsi que sa variance.
4. Déterminer la probabilité pour que l'intervalle entre deux évènements consécutif dépasse Θ . En déduire la valeur moyenne $\langle \Theta \rangle$ de l'intervalle entre deux évènements consécutifs.
5. Un évènement s'est produit à t = 0 ; rien ne s'est produit entre 0 et h. Quelle est l'espérance du temps restant qui s'écoulera jusqu'au prochain évènement, connaissant l'information ci-dessus ?
6. Tracer le graphe du processus de naissance associé.

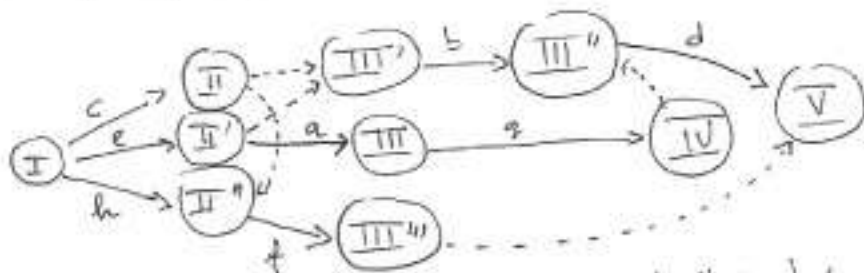
Exercice 1

x	a	b	c	d	e	f	g	h
$P(x)$	e	c, e	-	b, f, g	-	c, h	a	-
durée	3	15	3	2	4	21	16	5
$P(a)$	-	-	-	c, e, a	-	-	e	-
$P(h)$	e	c, e	-	b, g	-	c, h	a	-

$\Rightarrow$ on peut éliminer $P(d)=c$

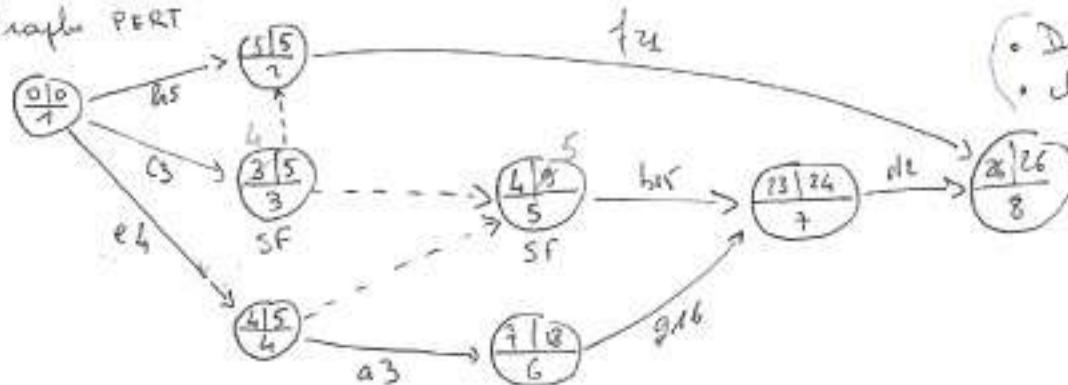
a) Construction du graphe

niveau	0	1	2	3
tâches	c, e, h	a, b, f	g	d



graphe intermédiaire: on peut supprimer (réduire) des arcs fictifs: $III - III'$ et $III'' - V$

Graphes PERT



- Durée du projet: 26
- chemin critique: $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 8$ (2 tâches critiques)
- date au plus tôt et au plus tard: cf. graphique

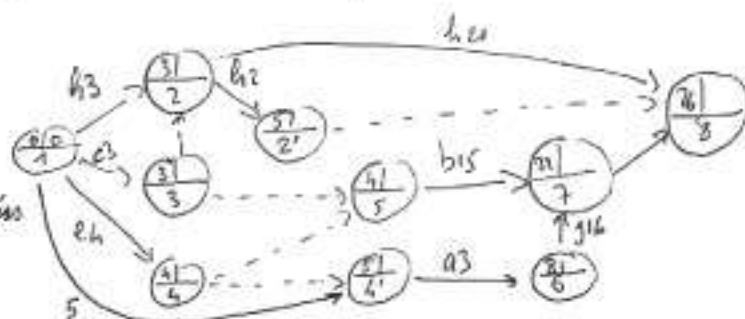
	a	b	c	d	e	f	g	h
T_i	4	4	0	23	0	5	7	0
T_j	5	9	2	24	1	5	8	0
α_i	1	5	2	1	1	0	1	0
m_i	0	4	1	1	0	0	0	0
p_i	0	3	1	0	0	0	0	0

Attention: sommets T_i et T_j sont égaux à 5

b) Modifications: f peut commencer quand h est réalisé ou 3/5
à début au + tôt 5 mois après début

Nouveau PERT

nouveaux durées
nouveaux liens



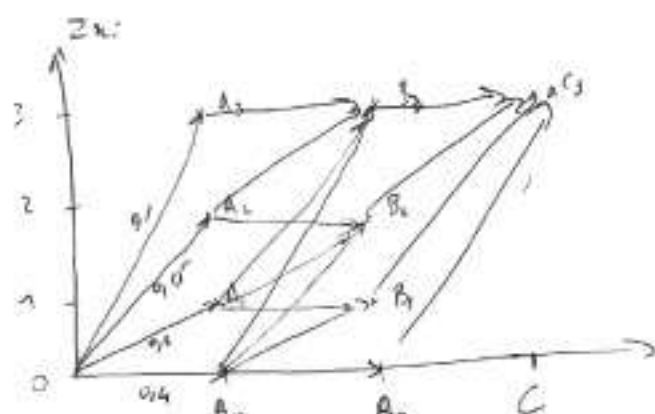
Exercice 2

(2)

a) Probabilité d'échec d'ensemble = $P(\text{échec A} \cap \text{échec B} \cap \text{échec C}) = P_A P_B P_C = 0,192$
indépendance

b) Programmation dynamique : problème de décisions séquentielles
 x_i : nombre de chercheurs affectés à l'étape i

l'état du système correspond à la somme des chercheurs affectés = $\sum x_i$



On doit minimiser la probabilité totale d'échec

1^{ère} phase
choix de x_A

$$\begin{aligned} OA_0 &: 0,4 \\ OA_1 &: 0,2 \\ OA_2 &: 0,15 \\ OA_3 &: 0,1 \end{aligned}$$

2^{ème} phase
choix de x_B

$$\begin{aligned} OA_0 B_0 &= 0,4 \times 0,6 = 0,24 \\ OA_1 B_1 &= 0,2 \times 0,4 = 0,08 \\ OA_2 B_2 &= 0,15 \times 0,6 = 0,09 \\ OA_3 B_3 &= 0,1 \times 0,4 = 0,04 \\ OA_0 B_1 &= 0,4 \times 0,2 = 0,08 \\ OA_1 B_2 &= 0,2 \times 0,6 = 0,12 \\ OA_2 B_3 &= 0,15 \times 0,4 = 0,06 \\ OA_3 B_0 &= 0,1 \times 0,6 = 0,06 \end{aligned}$$

3^{ème} phase

choix de x_C

$$\begin{aligned} OA_0 B_0 C_3 &= 0,24 \times 0,3 = 0,072 \\ OA_1 B_1 C_3 &= 0,08 \times 0,1 = 0,008 \\ OA_2 B_2 C_3 &= 0,09 \times 0,6 = 0,054 \\ OA_3 B_3 C_3 &= 0,04 \times 0,4 = 0,016 \end{aligned}$$

la probabilité minimale d'échec est de 0,0266
la meilleure solution est $x_A = 0$
 $x_B = 3$
 $x_C = 0$

Exercice 3

1. Processus homogène (donc λ indépendant de t) $\rightarrow$ seule compte la durée de l'expérience
ici t : $P_n(t) = \frac{(t)^n}{n!} \exp(-t)$

2. a. $P_0(t) = \exp(-t)$

b. $P_1(t) = t \exp(-t)$

c. Δt est choisi (pour définition) suffisamment petit pour que la probabilité que deux événements se produisent sur Δt soit négligeable

$$\begin{aligned} 3. \bar{n}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{t^n}{n!} \exp(-t) = t \exp(-t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= t \exp(-t) \exp(t) = t \end{aligned}$$

Exercice 3 (suite)

(3)

Le nombre moyen d'événements entre 0 et t est donc proportionnel à la durée d'expérience.

$$\sigma_t^2 = E(n^2) - \bar{n}(t)^2 = \lambda t$$

4. Soit τ la durée de l'intervalle : "l'événement I de position θ^* est la même que

"aucun événement ne se produit entre 0 et θ^* "

$$\Rightarrow \Pr(I > \theta^*) = \Pr(\theta) = \exp(-\lambda \theta^*)$$

C'est une loi exponentielle associée au processus de Poisson. On a donc $f(\theta) = \Pr(I < \theta) = 1 - \exp(-\lambda \theta)$

$$\text{et } f(\theta) d\theta = \Pr(\theta < \tau < \theta + d\theta) = \lambda f(\theta) = \lambda \exp(-\lambda \theta)$$

$$\text{Par suite } \bar{\theta} = \int_0^{\infty} \theta f(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} \lambda \theta e^{-\lambda \theta} d\theta$$

$$\text{En posant } \lambda \theta = x \text{ et } d\theta = \frac{1}{\lambda} dx \text{ on a } \bar{\theta} = \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$\text{Mais en intégrant par parties } \int_0^{\infty} x d(-e^{-x}) = (x e^{-x})_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

$$\Rightarrow \bar{\theta} = \frac{1}{\lambda}$$

5. La loi est sans mémoire : les événements qui se sont produits avant t ne conditionnent pas les probabilités des événements survenant après

$$\Rightarrow \bar{r} = \frac{1}{\lambda}$$

