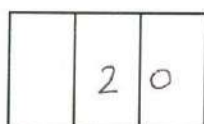


NOM GUEDJPrénom AlexandrePromo 2018Date 03/03/16Feuille 1/2GUEDJ Alexandre
L3 - 2015MATIÈRE Optimisation de la complexité25
25Exercice I.

La solution proposée est la suivante:

	X	Y	Z	
A	0	3	2	5
B	4	1	0	5
	4	4	2	

Calculons les potentiels:

$$U_1 + V_2 = 7$$

$$U_1 + V_3 = 8$$

$$U_2 + V_1 = 4$$

$$U_2 + V_2 = 6$$

On a bien $m+n-1$ cases non nulles, non dégénérée. Posons $U_1 = 0$. On obtient:

$$U_1 = 0$$

$$V_2 = 7$$

$$V_3 = 8$$

$$U_2 = -1$$

$$V_1 = 5$$

6

Calculons à présent les dij:

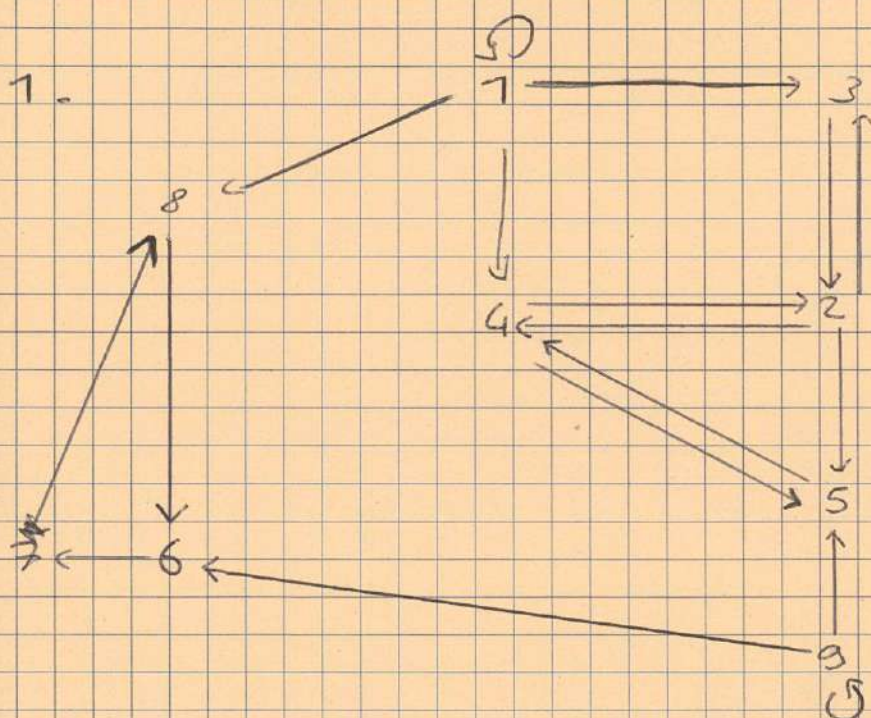
$$d_{11} = 5 - (U_1 + V_1) = 5 - (0 + 5) = 0$$

$$d_{23} = 9 - (U_2 + V_3) = 9 - (-1 + 8) = 2.$$

Les d_{ij} étant tous positifs ou nuls, la solution est optimale.

Si un d_{ij} avait été négatif strictement, on aurait pu optimiser, ce qui n'est pas le cas ci.

Exercice II.



Il n'est pas nécessaire d'associer les valeurs par la résolution de l'exercice.

1

a. Les composantes connexes sont :

2

$\{6, 7, 8\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{1\}$, $\{9\}$

2

b. Les classes persistantes sont $\{6, 7, 8\}$ et $\{2, 3, 4, 5\}$.

Les classes transitoires sont $\{1\}$ et $\{9\}$.

c. Nous étudions la classe $\{2, 3, 4, 5\}$. Cette classe est apériodique. En effet, le PGCD des nombres de chemins que l'on peut emprunter pour aller d'un état à un autre est 1.

- Pour 5, on peut utiliser $5 \rightarrow 4 \rightarrow 5$: 2 chemins
ou $5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5$, 3 chemins.

$$\text{PGCD}(2, 3) = 1$$

- Pour 4, on a $\begin{cases} 4 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \end{cases}$; $\text{PGCD}(2, 3) = 1$.

- Pour 2, on a $\begin{cases} 2 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \\ 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \end{cases}$; $\text{PGCD}(2, 3) = 1$

- Pour 3, on a $\begin{cases} 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \end{cases}$; $\text{PGCD}(2, 5) = 1$.

A l'infini, les probabilités de se trouver sur un état de la classe vont se stabiliser, ces probabilités seront décrites dans le vecteur π^* . On peut calculer π^* en faisant $\pi^* P = \pi^*$, avec la somme des composantes de $\pi^* = 1$.

d. (Petite erreur de frappe: il y a deux questions c!)

- 2 Ici, la classe $\{6, 7, 8\}$ est périodique, car pour aller d'un état vers lui-même, il faut emprunter $3k$ chemins, $k \in \mathbb{N}^*$.

$\text{PGCD} = 3$, donc classe périodique de période 3.

A l'infini, les probabilités ~~seront les mêmes qu'à l'étape 3~~, elles ne se stabilisent pas.

Exercice III

$$a - \begin{cases} x_1 - 2x_2 + y_1 = 2 \\ -x_1 + x_2 + y_2 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + y_3 = 6 \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$
$$Z_1 = x_1 - 2x_2 + 10$$

$$\text{on a } \begin{cases} y_1 = 2 - x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2 + x_1 - x_2 \\ y_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \\ x_1, \dots \geq 0 \end{cases}$$

Point admissible: $(0, 0, 2, 2, 6)$

$$B \leftarrow x_1$$

$$y_1 \rightarrow \text{HB}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - y_1 \\ y_2 = 2 + 2 + 2x_2 - y_1 - x_2 \\ y_3 = 6 + 2 + 2x_2 - y_1 - 2x_2 \\ x_1, \dots \geq 0 \end{cases} \quad \text{donc}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - y_1 \\ y_2 = 4 + x_2 - y_1 \\ y_3 = 8 - y_1 \\ x_1, \dots \geq 0 \end{cases}$$

$$Z_1 = 2 + 2x_2 - y_1 - 2x_2 + 10$$
$$= 12 - y_1$$

4

Z_1 a pour maximum 12 atteint au point $(2, 0, 0, 4, 8)$ sur D.

$$b - Z_2 = 2x_1 + x_2 + 10$$

Ici, c'est encore x_1 qui entre dans la base et y_1 qui en sort, on obtient a nouveau :

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - y_1 \\ y_2 = 4 + x_2 - y_1 \\ y_3 = 8 - y_1 \\ x_1, \dots \geq 0 \end{cases} \quad Z_2 = 4 + 5x_2 - 2y_1$$

5 étant positif, on fait ensuite entrer

NOM GUEDJ

Prénom Alexandre

Promo 2018

Date 03/03/16

Feuille 2/2 -

MATIÈRE Optimisation de la complexité

S étant positif, on fait chercher à faire entrer x_2 dans la base, et faire sortir un terme. Or, dans notre système:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - y_1 \\ y_2 = 6 + x_2 - y_1 \\ y_3 = 8 - y_1 \\ x_1, \dots \geq 0 \end{cases}$$

, aucun coefficient de x_2 n'est négatif. Il est donc impossible de faire diminuer x_1 , y_2 ou y_3 avec x_2 , car $x_2 \geq 0$.

La fonction $Z_2 = 2x_1 + x_2 + 10$ n'a donc pas de maximum sur

D.

