

DE Optimisation et Complexité

Ni documents, ni machines, ni téléphones

Les étudiants chinois ont droit à un dictionnaire.

Un conseil bien lire les énoncés et les questions posées (avant de démarrer).

Exercice 1. Problème de transport (environ 8 pts)

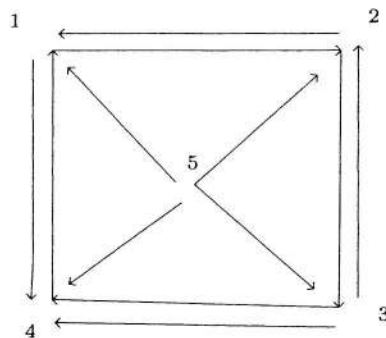
Déterminer des **entiers positifs** $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23})$ tels que $7x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 6x_{21} + 3x_{22} + 5x_{23}$ soit minimal, sous les contraintes

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 5 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 5 \\ x_{11} + x_{21} = 3 \\ x_{12} + x_{22} = 3 \\ x_{13} + x_{23} = 4 \end{cases}$$

On expliquera ce que l'on fait et pourquoi.

Exercice 2. Chaînes de Markov discrètes (environ 12 pts)

On considère le graphe suivant



Avec la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$

- Déterminer si la chaîne est irréductible; si elle ne l'est pas donner les classes irréductibles; les réponses seront justifiées.
- On se limite à la chaîne dont les sommets sont $\{1,2,3,4\}$; déterminer si elle est périodique ou pas; on justifiera.
- Si elle est apériodique on donnera la méthode pour déterminer sa distribution de probabilités stationnaire (sans la calculer).
- Si elle est périodique on donnera les sous-classes stables.

c. On suppose que le système est à l'état 1 à l'instant 0, quelle est la probabilité qu'il soit à l'état 1 à l'instant 1, à l'instant 2 ? On justifiera.

d. On suppose que le système est à l'état 1 à l'instant 0, quelle est la probabilité qu'il soit à l'état 1 au bout d'un temps très long ?

(cette question est **la plus difficile**, elle nécessite une bonne compréhension de la périodicité).

Exercice 3. Programmation linéaire (environ 10 pts)

Déterminer le maximum de la fonction $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + x_2 + x_3$

sous les contraintes
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 3 \\ (x_1, x_2, x_3) \text{ positifs} \end{cases}$$

On justifiera ce que l'on fait et pourquoi.

$z = 7$
3
2
2