

Heure 22 : Problème d'affectation et algorithme hongrois

N.O.P. Section 7.3.3
Notes complémentaires

Objectifs :

- ☐ Reconnaître un problème d'affectation ;
- ☐ Comprendre et appliquer l'algorithme hongrois.

466

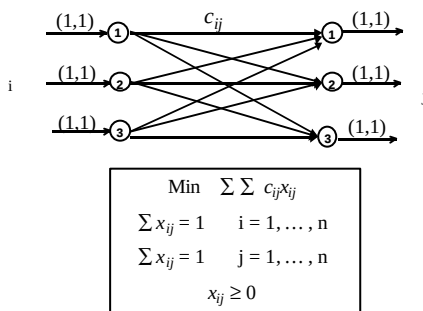
Les problèmes d'affectation

Les problèmes d'affectation sont des cas spéciaux du problème de transport où la demande associée à chaque destination est égale à 1.

Il existe une méthode, "la méthode hongroise" qui simplifie la résolution du problème d'affectation.

467

Les problèmes d'affectation



468

La méthode hongroise

Matrice des coûts

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	24	10	21	11
M	14	22	10	15
O	15	17	20	19
P	11	19	14	13

Ex. Le coût d'affecter le V.P. «P» à l'usine 4 est de 13.

469

La méthode hongroise

Étape 1:

Réduction des lignes : créer une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimal sur chaque ligne et en le soustrayant de chaque coût sur la ligne.

Ex. La première ligne devient: $24-10=14$, $10-10=0$, $21-10=11$, $11-10=1$

	USINE				
V.P.	1	2	3	4	RÉDUIT DE:
F	14	0	11	1	10
M	4	12	0	5	10
O	0	2	5	4	15
P	0	8	3	2	11

470

La méthode hongroise

Étape 2:

Réduction des colonnes : créer une nouvelle matrice des coûts en choisissant le coût minimal dans chaque colonne et en le soustrayant de chaque coût dans la colonne.

	USINE				
V.P.	1	2	3	4	
F	14	0	11	0	
M	4	12	0	4	
O	0	2	5	3	
P	0	8	3	1	
RÉDUIT DE:	0	0	0	1	

471

La méthode hongroise

Étape 3:

Déterminer le nombre minimal de lignes nécessaires sur les lignes et les colonnes pour couvrir tous les zéros. Si ce nombre est égal au nombre de lignes (ou colonnes), la matrice est réduite; aller à l'étape 5. Si ce nombre est inférieur au nombre de lignes (ou colonnes), aller à l'étape 4.

472

La méthode hongroise

Dans ce cas, le nombre minimal de lignes est de 3.

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	1	0	1	0
M	4	12	0	4
O	0	2	5	3
P	0	8	3	1

Donc, on va à l'étape 4.

473

La méthode hongroise

Étape 4:

Trouver la cellule de valeur minimum non-couverte par une ligne.

Soustraire cette valeur de toutes les cellules non-couvertes.

Ajouter cette valeur aux cellules situées à l'intersection de deux lignes.

Retourner à l'étape 3.

474

La méthode hongroise

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	1	0	1	0
M	4	12	0	4
O	0	2	5	3
P	0	8	3	1

Valeur minimum

475

La méthode hongroise

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	1	0	1	0
M	4	11	0	3
O	0	1	5	2
P	0	7	3	0

+1

-1

476

La méthode hongroise

Maintenant, le nombre minimal de lignes est de 4.

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	1	0	1	0
M	4	11	0	3
O	0	1	5	2
P	0	7	3	0

Donc, on passe à l'étape 5.

477

La méthode hongroise

Étape 5:

Déterminer la solution optimale.

Note: P1 ne pourrait pas être choisi car l'affectation de «O» ne serait pas de coût minimal.

	USINE			
V.P.	1	2	3	4
F	15	~~12~~	12	0
M	4	11	~~10~~	3
O	~~1~~	1	5	2
P	0	7	3	~~13~~

478

La méthode hongroise

Résultat:

AFFECTATION		
V.P.	USINE	COÛT
F	2	10
M	3	10
O	1	15
P	4	13
COÛT TOTAL		48

479

Algorithme hongrois : Exemple

	C1	C2	C3	C4
P1	60	170	330	360
P2	130	200	200	400
P3	50	300	170	180
P4	120	90	250	200

480

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 1 : Réduction des lignes

	C1	C2	C3	C4	
P1	60	170	330	360	$\Delta=60$
P2	130	200	200	400	$\Delta=130$
P3	50	300	170	180	$\Delta=50$
P4	120	90	250	200	$\Delta=90$

481

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 1 : Réduction des lignes

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	270	300
P2	0	70	70	270
P3	0	250	120	130
P4	30	0	160	110

482

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 2 : Réduction des colonnes

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	270	300
P2	0	70	70	270
P3	0	250	120	130
P4	30	0	160	110

$\Delta=0$ $\Delta=0$ $\Delta=70$ $\Delta=110$

483

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 2 : Réduction des colonnes

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	220	190
P2	0	70	0	160
P3	0	250	50	20
P4	30	0	90	0

484

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : Matrice Réduite

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	220	190
P2	0	70	0	160
P3	0	250	50	20
P4	30	0	90	0

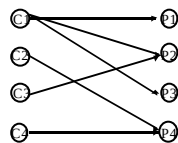
3 lignes et il en faut 4
⇒ Étape4

485

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : Matrice Réduite

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	220	190
P2	0	70	0	160
P3	0	250	50	20
P4	30	0	90	0



486

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 4 : Nouvelle réduction

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	220	190
P2	0	70	0	160
P3	0	250	50	20
P4	30	0	90	0

Réduction

487

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 4 : Nouvelle réduction

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	220	190
P2	0	70	0	160
P3	0	250	50	20
P4	30	0	90	0

Réduction de 20 unités
des nombres en vert

Ajout de 20 unités sur les
nombres en orange

Réduction

488

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : matrice réduite ?

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

489

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : matrice réduite ?

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

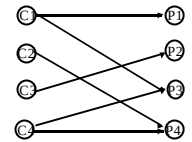
4 lignes
 ↓
 Solution optimale
 ↓
 Étape 5

490

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : matrice réduite ?

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

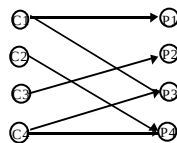


491

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 3 : matrice réduite ?

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0



492

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 5 : solution optimale

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

493

Algorithme hongrois : Exemple

Étape 5 : solution optimale

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

Solution = 530

494

Algorithme hongrois :

Problème de maximisation

495

Algorithme hongrois : Problème de maximisation

On doit ajouter une étape initiale :

Choisir le plus grand nombre et trouver l'écart de tous les éléments par rapport à ce nombre; i.e. on trouve la matrice des pénalités.

Le problème initial est alors équivalent au problème de minimiser les pénalités.

Max		C1	C2	C3	C4		Min		C1	C2	C3	C4
	P1	60	170	330	360			P1	340	230	70	40
	P2	130	200	200	400			P2	270	200	200	0
	P3	50	300	170	180			P3	350	100	230	220
	P4	120	90	250	200			P4	280	310	150	200

496

Algorithme hongrois

Explication théorique

497

Algorithme hongrois : explication théorique

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \\ \sum_j x_{ij} &= 1 \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_i x_{ij} &= 1 \quad j = 1, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } & \sum_i u_i + \sum_j v_j \\ u_i + v_j &\leq c_{ij} \quad i = 1, \dots, n \text{ et } \\ & \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

498

Algorithme hongrois : explication théorique

	C1	C2	C3	C4
P1	60	170	330	360
P2	130	200	200	400
P3	50	300	170	180
P4	120	90	250	200

$$\begin{aligned} u_i + v_j + e_{ij} &= c_{ij} \\ 0 + 0 + e_{ij} &= 300 \end{aligned}$$

499

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 1 : Réduction des lignes

	C1	C2	C3	C4
P1	60	170	330	360
P2	130	200	200	400
P3	50	300	170	180
P4	120	90	250	200

$$\Delta=60 \Rightarrow u_1 = \min_j c_{1j} = 60$$

$$\Delta=130 \Rightarrow u_2 = \min_j c_{2j} = 130$$

$$\Delta=50 \Rightarrow u_3 = \min_j c_{3j} = 50$$

$$\Delta=90 \Rightarrow u_4 = \min_j c_{4j} = 90$$

500

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 1 : Réduction des lignes

	C1	C2	C3	C4
P1	0	110	270	300
P2	0	70	70	270
P3	0	250	120	130
P4	30	0	160	110

$$u_1 = 60$$

$$u_2 = 130$$

$$u_3 = 50$$

$$u_4 = 90$$

$$u_i + v_j + e_{ij} = c_{ij}$$

$$u_2 + v_3 + e_{23} = c_{23}$$

$$130 + 0 + 70 = 200$$

501

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 2 : Réduction des colonnes

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	110	270	300
$u_2 = 130$	P2	0	70	70	270
$u_3 = 50$	P3	0	250	120	130
$u_4 = 90$	P4	30	0	160	110

$\Delta=0 \Rightarrow v_1 = \min_i (c_{i1} - u_i) = 0$
 $\Delta=0 \Rightarrow v_2 = \min_i (c_{i2} - u_i) = 0$
 $\Delta=70 \Rightarrow v_3 = \min_i (c_{i3} - u_i) = 70$
 $\Delta=110 \Rightarrow v_4 = \min_i (c_{i4} - u_i) = 110$

$\Delta=0 \quad \Delta=0 \quad \Delta=70 \quad \Delta=110$

502

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 2 : Réduction des colonnes

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	110	220	190
$u_2 = 130$	P2	0	70	0	160
$u_3 = 50$	P3	0	250	50	20
$u_4 = 90$	P4	30	0	90	0

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$

$u_i + v_j + e_{ij} = c_{ij}$
 $u_3 + v_3 + e_{33} = c_{33}$
 $50 + 70 + 50 = 170$

503

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 3 : Matrice Réduite

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	110	220	190
$u_2 = 130$	P2	0	70	0	160
$u_3 = 50$	P3	0	250	50	20
$u_4 = 90$	P4	30	0	90	0

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$

3 lignes et il en faut 4 $\Rightarrow$
 solution du dual n'est pas optimale car la solution primale n'est pas réalisable

504

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 4 : Nouvelle réduction

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	110	220	190
$u_2 = 130$	P2	0	70	0	160
$u_3 = 50$	P3	0	250	50	20
$u_4 = 90$	P4	30	0	90	0

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$

Pour maximiser il faut réduire la valeur des e_{ij} et pour avoir une solution admissible il faut prendre le plus petit

505

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 4 : Nouvelle réduction

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	110	220	190
$u_2 = 130$	P2	0	70	0	160
$u_3 = 50$	P3	0	250	50	20
$u_4 = 90$	P4	30	0	90	0

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$

Réduction de $\Delta=20$ unités des nombres en rouge
 $\Downarrow$
 $e_{ij} \leftarrow e_{ij} - \Delta$

506

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 4 : Nouvelle réduction

		C1	C2	C3	C4
$u_1 = 60$	P1	0	90	200	170
$u_2 = 130$	P2	0	70	0	160
$u_3 = 50$	P3	0	230	30	0
$u_4 = 90$	P4	30	0	90	0

$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$

Réduction de $\Delta=20$ unités des nombres en rouge
 $\Downarrow$
 $e_{ij} \leftarrow e_{ij} - \Delta$

Pour conserver la relation $u_i + v_j + e_{ij} = c_{ij}$
 il faut alors
 $\Downarrow$
 $u_1 \leftarrow u_1 + \Delta$
 $u_3 \leftarrow u_3 + \Delta$

507

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 4 : Nouvelle réduction

$$v_1=0 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$$

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

$$u_1 = 60+20 \quad u_2 = 130 \quad u_3 = 50+20 \quad u_4 = 90$$

Ainsi pour tous les e_{ij} alors on conserve la relation

$$u_i + v_j + e_{ij} = c_{ij}$$

mais pas pour

$$e_{11} \text{ et } e_{31}$$

508

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 4 : Nouvelle réduction

$$v_1=0-20 \quad v_2=0 \quad v_3=70 \quad v_4=110$$

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	0	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	30	0	90	0

$$u_1 = 60+20 \quad u_2 = 130 \quad u_3 = 50+20 \quad u_4 = 90$$

Pour équilibrer les cases (P1,C1) et (P3,C1), il faut
 $v_1 \leftarrow v_1 - \Delta$

Pour e_{11} et e_{31} , on conserve alors la relation

$$u_i + v_j + e_{ij} = c_{ij}$$

mais plus pour e_{21} et e_{41} c'est pourquoi il faut faire

$$e_{21} \leftarrow e_{21} + \Delta$$

$$e_{41} \leftarrow e_{41} + \Delta$$

509

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 3 : matrice réduite ?

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

4 lignes

↓

Solution optimale

↓

Étape 5

510

Algorithme hongrois : explication théorique

Étape 5 : solution optimale

	C1	C2	C3	C4
P1	0	90	200	170
P2	20	70	0	160
P3	0	230	30	0
P4	50	0	90	0

511

Travail à faire : heure 22

N.O.P. chapitre 7 Nos 22, 23, 24
 (chapitre 7 Nos 20, 21, 22)

512