

Optimisation & complexité

TAI : Problèmes d'affectation

Alexis Yvin – Sébastien Masurel – Zacharie Amougou

EFREI-L3, 2011

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION.....	2
PROBLEMES D'AFECTATION.....	3
METHODE HONGROISE & RESOLUTION D'AFECTATION SIMPLE.....	4
RESOLUTION D'AFECTATION DOUBLE	8
CONCLUSION.....	9
SOURCES & DOCUMENTATIONS.....	10

INTRODUCTION

Du monde militaire et la recherche du meilleur moyen de placer ses troupes sur un champ de bataille, à la manière la plus efficace de produire et concevoir ces dernières, en passant par le milieu financier afin de permettre d'organiser, produire, stocker et vendre de façon optimale, la recherche opérationnelle se retrouve à tous niveaux où l'on souhaite améliorer les performances d'un système. À l'aide de méthodes mathématique, nous pouvons comprendre et analyser un système pour ainsi trouver les axes d'optimisation possibles pour le rendre plus efficace ou pour avoir la meilleure prise de décision possible.

Pour ce TAI nous nous intéressons plus spécialement aux problèmes d'affectation. Cela consiste à déterminer le procédé de répartition optimal de plusieurs variables en fonction de données (contrainte, classement de préférence par exemple). Une application concrète de ce problème est d'attribuer des ouvriers à plusieurs tâches en fonction de leurs aptitudes ou bien, comme ici dans notre projet, des employés à des postes par rapport à leurs ordres de préférence respectifs.

PROBLEMES D'AFFECTION

Les problèmes d'affectation se présentent toujours comme suit :

- Nous disposons d'un certain nombre de facteurs de production : $i = 1$ à m
- Nous disposons également d'un nombre de postes de travail : $j = 1$ à n

Le problème consiste à affecter les m ressources à n postes de façon à être le plus productif possible (avec un moindre coût). La formalisation est la suivante :

$$\text{Coût min} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}$$

Avec les contraintes :

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = 1$$

et

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = 1$$

On a $X_{ij} = 0$ ou 1 .

La modélisation d'un problème d'affectation se traduit par l'élaboration d'une matrice des coûts, dont les lignes et colonnes représentent les ressources à affecter et les postes d'affectation.

Deux conditions doivent être respectées pour que ce type de problème puisse être résolu par la méthode d'affectation :

- Un nombre de postes égal au nombre de personnes ($m = n$)

Si m est différent de n , il faut créer des ressources ou des emplois fictifs.

- Si la matrice initiale est une matrice de satisfaction ou de bénéfice

Il faut alors la transformer en matrice de minimisation à l'aide de la technique du majorant.

METHODE HONGROISE & RESOLUTION D'AFFECTION SIMPLE

L'algorithme de Kuhn consiste à traduire tout problème d'affectation sous forme d'un tableau dans lequel on devra choisir un élément, et un seul, par ligne et par colonne afin d'obtenir une somme globale minimale (coût minimal).

On peut découper cet algorithme en 3 phases. Afin de décrire cette méthode, nous allons l'appliquer à un cas concret d'affectation simple en détaillant la méthode à chaque étape. Nous allons donc résoudre le problème d'affectation ci-dessous à l'aide de la méthode hongroise.

Problème posé (R. Faure)

Une administration veut affecter $n = 5$ personnes salariées « A, B, C, D, E » aux postes « a, b, c, d, e » en maximisant la satisfaction générale. Les classements des postes sont donnés par le tableau I.

	a	b	c	d	e
A	1	2	3	4	5
B	1	4	2	5	3
C	3	2	1	5	4
D	1	2	3	5	4
E	2	1	4	3	5

Tableau I : classement des postes

Nous appliquerons la méthode hongroise mentionnée précédemment à ce tableau afin de trouver l'affectation optimale des salariés de cette administration.

Phase 1 : obtention initiale de zéros

		a	b	c	d	e	
On soustrait le plus petit nombre à tous les éléments d'une même ligne.	A	0	1	2	3	4	-1
	B	0	3	1	4	2	-1
	C	2	1	0	4	3	-1
	D	0	1	2	4	3	-1
	E	1	0	3	2	4	-1

On soustrait le plus petit nombre à tous les éléments d'une même colonne.

	a	b	c	d	e
A	0	1	2	1	2
B	0	3	1	2	0
C	2	1	0	2	1
D	0	1	2	2	1
E	1	0	3	0	2
				-2	-2

Phase 2 : Recherche de la solution optimale de coût nul

On cherche ici à déterminer la solution optimale de coût nul, pour cela elle ne doit contenir que des zéros. Si c'est possible, nous aurons trouvé la solution optimale, sinon nous passerons à la phase 3.

On cherche d'abord la ou l'une des lignes comptant le moins de zéros (s'il y a plusieurs lignes avec un même nombre de zéros, on prend la première dans le sens haut-bas), on encadre un des zéros de cette ligne (par défaut le plus à gauche) et l'on barre (X) les autres zéros se trouvant sur la même ligne et colonne. Parmi les lignes restantes, on répète le processus, et on continue jusqu'à ce qu'on ne puisse plus encadrer de zéro.

	a	b	c	d	e	Nb de 0 itération 1	it n°2	it n°3	it n°4
A	0 ₁	1	2	1	2	1	0	0	0
B	~~0~~	3	1	2	0 ₂	2	1	0	0
C	2	1	0 ₃	2	1	1	1	1	0
D	~~0~~	1	2	2	1	1	0	0	0
E	1	0 ₄	3	~~0~~	2	2	2	2	2

À la fin de cette phase nous ne pouvons définir de solution. En effet, nous ne trouvons pas de 0 sur chaque ligne et colonne du tableau. Nous devons donc passer à la phase 3.

Phase 3 : Recherche d'une solution optimale

Cette phase consiste à faire apparaître des 0 là où il n'y en a pas pour ainsi trouver une solution. Cette phase se déroule étape par étape comme suit :

1/ Marquer d'une croix (X) les lignes ne contenant pas de 0 encadré.

2/ Marquer d'une croix toute colonne qui a un 0 barré sur une ligne marquée.

3/ Marquer d'une croix toute ligne qui a un 0 encadré dans une colonne marquée.

4/ Répéter les opérations 2 et 3 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de lignes ou colonnes à marquer.

5/ Tracer un trait horizontal sur chaque ligne non marquée et un trait vertical sur chaque colonne marquée.

	a	b	c	d	e	
A	0	1	2	1	2	X_3
B	3	3	1	2	0	
C	2	1	0	2	1	
D	3	1	2	2	1	X_1
E	1	0	3	0	2	
	X_2					

À la suite de ces opérations, nous obtenons un tableau non rayé comme suit :

1	2	1	2
1	2	2	1

Nous prenons le plus petit élément du tableau que l'on ajoute aux lignes rayées et l'on soustrait aux colonnes non rayées. Soit, on l'ajoute aux chiffres barrés deux fois et le soustrait aux chiffres non barrés.

$\text{Min}(1, 2, 1, 2, 1, 2, 2, 1) = 1$. Le plus petit élément est 1.

Le tableau ci-dessus ne doit pas contenir de 0, si c'est le cas il y a une erreur, du fait que nous utilisons son plus petit élément pour le soustraire ou l'ajouter. S'il est égal à 0 cela n'a aucun impact sur le tableau d'affectation et nous ramène au point de départ.

On obtient alors le tableau ci-dessous, auquel on applique à nouveau la phase 2 :

	a	b	c	d	e
A	0	0	1	0	1
B	1	3	1	2	0
C	3	1	0	2	1
D	0	0	1	1	0
E	2	0	3	0	2

Retour phase 2 :

	a	b	c	d	e	Nb de 0 itération 1	it n°2	it n°3	it n°4	it n°5
A	~~0~~	0 ₄	1	~~0~~	1	3	3	3	2	0
B	1	3	1	2	0 ₁	1	0	0	0	0
C	3	1	0 ₂	2	1	1	1	0	0	0
D	0 ₃	~~0~~	1	1	~~0~~	3	2	2	0	0
E	2	~~0~~	3	0 ₅	2	2	2	2	2	1

Chaque ligne possède un 0 encadré, nous avons une solution optimale.

Cette solution a un coût minimal de : $2 + 3 + 1 + 1 + 3 = 10$.

Les couples « poste-employés » sont les suivants : A-b, B-e, C-c, D-a et E-d.

RESOLUTION D'AFFECTION DOUBLE

Nous avons résolu le problème d'affectation en fonction des préférences de poste des 5 employés. Maintenant nous allons en plus prendre en compte l'ordre de préférence établi par les employeurs après examination des dossiers de leurs salariés. Cet ordre est donné dans le tableau II.

	A	B	C	D	E
a	2	1	5	4	3
b	2	3	1	4	5
c	1	4	5	3	2
d	2	4	1	3	5
e	1	2	3	5	4

Tableau II : classement des personnes

Afin de résoudre ce problème et de déterminer la solution optimale qui maximise la satisfaction globale « employeurs + salariés », nous allons appliquer la méthode hongroise. Cependant, nous devons tout d'abord concaténer les deux tableaux de classement en un seul, afin de réunir les données, et de pouvoir exécuter l'algorithme. Pour ce faire, nous allons additionner les valeurs des tableaux en prenant soin d'additionner les valeurs correspondantes, c'est-à-dire les valeurs appartenant aux mêmes couples : A-a, A-b, A-c...

Nous obtenons alors le tableau suivant, sur lequel nous appliquerons la méthode hongroise :

	a	b	c	d	e
A	3	4	4	6	6
B	2	7	6	9	5
C	8	3	6	6	7
D	5	6	6	8	9
E	5	6	6	8	9

Dans l'application de l'algorithme qui suit nous irons plus vite au niveau de la résolution, en éliminant les étapes intermédiaires (phases de calcul et explications essentiellement) et en donnant le résultat de chaque phase directement.

Phase 1 : obtention initiale de 0

	a	b	c	d	e	
A	0	1	0	0	0	-3
B	0	5	3	4	0	-2
C	5	0	2	0	1	-3
D	0	1	0	0	1	-5
E	0	1	0	0	1	-5
			-1	-3	-3	

Phase 2 : Recherche d'une solution de coût nul

	a	b	c	d	e
A	~~0~~	1	~~0~~	~~0~~	0 ₅
B	0 ₁	5	3	4	~~0~~
C	5	0 ₂	2	~~0~~	1
D	~~0~~	1	0 ₃	~~0~~	1
E	~~0~~	1	~~0~~	0 ₄	1

Nous obtenons directement une solution

Le coût de cette solution optimale est de : $6 + 2 + 3 + 6 + 8 = 25$.

Les couples « poste-employés » sont les suivants : A-e, B-a, C-b, D-c et E-d.

CONCLUSION

La méthode hongroise est un outil mathématique simple et efficace pour déterminer rapidement une solution d'affectation optimale selon des critères de satisfaction ou de rendement. Elle permet également d'effectuer la meilleure prise de décision possible.

SOURCES & DOCUMENTATIONS

Sites Web :

- <http://serge.mehl.free.fr/anx/ro.html>
- <http://argelia.centerblog.net/34-programmation-lineaire-3>