

Introduction :

La programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certains problèmes d'optimisation avec contraintes. Elle est utilisée, en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique pour l'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés. Les problèmes de programmation linéaire se résolvent grâce à l'algorithme du simplexe.

C'est pourquoi nous allons expliquer dans un premier temps la méthode, illustrée d'un exemple dans la deuxième partie, et complétée par l'ajout d'événements imprévus (PML paramétrée) dans une troisième partie.

2) déterminer la production optimale d'un atelier qui fabrique deux types de produit, A_1 et A_2 , en quantités x_1 et x_2 , dont le bénéfice après la vente des produits s'élève à $\Gamma = 10x_1 + 20x_2$. Les contraintes diverses (fabrication, vente...) se traduisent par le système d'inéquations simplifiées suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases} \quad (\text{et pas } \leq 2 !)$$

Résolution :

$$\begin{cases} \Gamma = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

On transforme ce problème en un problème de minimisation en changeant le signe de la fonction bénéfice puis on l'écrit sous forme standard : trouvons x_1 et x_2 tels que :

$$\begin{cases} \max_x \Gamma(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 + t_1 = 6 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - t_3 + e_3 = 6 \end{cases}$$

Le tableau (T0) du simplexe est donc le suivant :

T0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
F	10	20	0	0	0	0	0	

1^{er} critère de Dantzig : x_2

2eme critère de Dantzig : t_1

Variables hors base : $\{x_1, x_2\}$

Variables dans la base : $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$

Comme les coefficients des variables hors base ne sont pas tous positifs ou nuls, cette base n'est pas optimale. On va donc effectuer un changement de base.

Nous allons faire rentrer dans la base la variable hors base dont le coût réduit le plus grand positif car nous recherchons un maximum : C'est x_2 .

Afin d'obtenir la forme canonique relative à la nouvelle base $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$, il faut faire subir aux lignes du tableau du simplexe des modifications (pivot).

On a donc le nouveau tableau (T1) du simplexe suivant :

T1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1/3	1	1/3	0	0	0	2	6
t_2	4/3	0	1/3	1	0	0	4	3
t_3	5/3	0	-1/3	0	-1	1	0	0
F	10/3	0	-20/3	0	0	0	-40	

1^{er} critère de Dantzig : x_1

2eme critère de Dantzig : t_2

Variables hors base : $\{x_1, t_1\}$

Variables dans la base : $\{x_2, t_2, t_3, e_3\}$

Cette base n'est pas optimale car la variable x_1 a un coût réduit strictement positif ($\frac{10}{3}$).

Cette variable x_1 doit donc rentrer dans la base.

La variable t_3 quitte la base pour laisser place à x_1 .

Afin d'obtenir la forme canonique relative à la nouvelle base $\{x_2, t_2, t_3, e_3\}$, il faut faire subir aux lignes du tableau du simplexe des modifications (pivot).

On a donc le nouveau tableau (T2) du simplexe suivant :

$T2$	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
t_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	-5	
Γ	0	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	-50	

Variables hors base : $\{x_1, x_2\}$

Variables dans la base : $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$

Les coûts réduits de toutes les variables de la base sont maintenant négatifs ou nuls et, par conséquent, la solution est optimale et l'algorithme de termine.

On a donc un bénéfice maximal de 50 en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\Gamma(3,1) = 10 \times 3 + 20 \times 1 = 50$

Remarque : On arrive à ce résultat en utilisant 2 tableaux du simplexe.