

- 3) tester la "robustesse" de la décision optimale de production lorsqu'un des paramètres du problème varie à cause d'événements imprévus : on traitera successivement le cas des bénéfices unitaires 10 et 20 des produits A_1 et A_2 en utilisant la PML paramétrée qui consiste à remplacer le paramètre étudié P par $P(1 + \lambda)$ avec $\lambda > -1$ et à déterminer l'optimum de production suivant les valeurs de λ .

Résolution :

Les coefficients dans les contraintes et la fonction économique sont parfois mal connus : une petite variation de ces paramètres peut parfois modifier l'optimum, ce qui pose un problème quand par exemple cet optimum représente une décision de fabrication, une décision d'utilisation de ressources...

La technique de paramétrisation consiste à considérer un des coefficients comme un paramètre et à chercher l'optimum pour toutes les valeurs de ce paramètre ; on teste ainsi successivement chaque coefficient du problème.

Rappel du dernier tableau obtenu :

T_2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	b
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3
t_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	-5
Γ	0	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	-50

Et le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_x \Gamma(x_1, x_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2 = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 + t_1 = 6 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - t_3 + e_3 = 2 \end{array} \right.$$

1) Pour le paramètre P_1 :

On remplace le paramètre P_1 par $P_1 = 10(\lambda + 1)$ avec $\lambda > -1$.

L'écriture de Γ donne :

$$\begin{aligned} \Gamma(x_1, x_2) &= 10(\lambda + 1)x_1 + 20x_2 \\ \Gamma &= 10(\lambda + 1)\left(3 - \frac{1}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2\right) + 20\left(1 - \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right) \\ \Gamma &= \left(30 - \frac{10}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2\right)(1 + \lambda) + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2 \end{aligned}$$

$$\Gamma = 30 + 30\lambda - \frac{10}{4}t_1 - \frac{10\lambda}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2 - \frac{30\lambda}{4}t_2 + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2$$

$$\Gamma = t_1 \left(-\frac{10}{4} - \frac{10\lambda}{4} - \frac{20}{4} \right) + t_2 \left(-\frac{30}{4} - \frac{30\lambda}{4} + \frac{20}{4} \right) + 50 + 30\lambda$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-1 - \lambda - 2) + \frac{10}{4}t_2(-3 - 3\lambda + 2) + 50 + 30\lambda$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-3 - \lambda) + \frac{10}{4}t_2(-1 - 3\lambda) + 50 + 30\lambda$$

Deux valeurs critiques apparaissent pour λ : $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$.

On élimine donc λ_1 car il est inférieur à -1.

Si $-1 < \lambda < -\frac{1}{3}$: On cherche à maximiser Γ sous les mêmes contraintes.

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	-2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
Γ	$10(\lambda + 1)$	20	0	0	0	0	0	

1^{er} critère : x_2

2^{ème} critère : t_1

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	2	
t_2	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	4	
t_3	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1	1	0	
Γ	$10(\lambda + \frac{1}{3})$	0	$-\frac{20}{3}$	0	0	0	-40	

On a donc un bénéfice maximal de 40 en ayant vendu 0 articles A_1 et 2 article A_2 :

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$\Gamma = 10 \times 0 + 20 \times 2 = 40$

Si $-\frac{1}{3} < \lambda$:

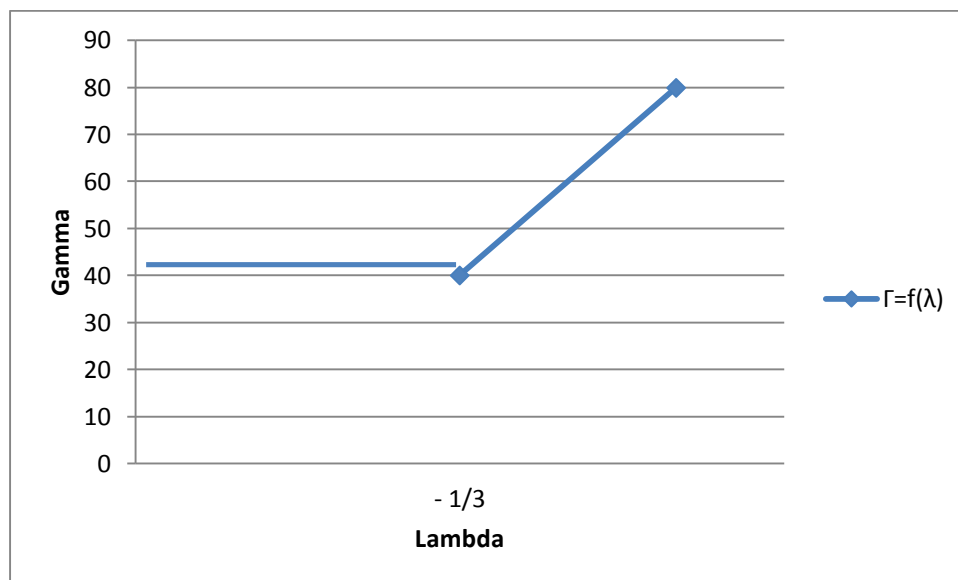
T_2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
t_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	-5	
Γ	0	0	$\frac{-5\lambda - 15}{2}$	$\frac{-15\lambda - 5}{2}$	0	0	$-30\lambda - 50$	

On a donc un bénéfice maximal de $30\lambda + 50$ en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$\Gamma = 30\lambda + 50$$



2) Pour le paramètre P_2 :

On remplace le paramètre P_2 par $P_2 = 20(\lambda + 1)$ avec $\lambda \geq -1$.

L'écriture de Γ donne :

$$\Gamma = 10x_1 + 20(\lambda + 1)x_2$$

$$\Gamma = 10\left(3 - \frac{1}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2\right) + (20 + 20\lambda)\left(1 - \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right)$$

$$\Gamma = 30 - \frac{10}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2 + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2 + 20\lambda - \frac{20\lambda}{4}t_1 + \frac{20\lambda}{4}t_2$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-1 - 2 - 2\lambda) + \frac{10}{4}t_2(-3 + 2 + 2\lambda) + 50 + 20\lambda$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-3 - 2\lambda) + \frac{10}{4}t_2(-1 + 2\lambda) + 50 + 20\lambda$$

Deux valeurs critiques apparaissent pour λ : $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

On élimine donc λ_1 car il est inférieur à -1.

Si $-1 < \lambda < \frac{1}{2}$: On cherche à maximiser Γ sous les mêmes contraintes.

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1	3	1	0	0	0	6	6
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	1
Γ	10	$20(\lambda + 1)$	0	0	0	0	0	

1^{er} critère : x_1

2^{ème} critère : t_3

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	0	$\frac{5}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	5	2
t_2	0	$-\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2
Γ	0	$20(\lambda + \frac{3}{2})$	0	0	5	-5	-10	

1^{er} critère : x_2

2^{ème} critère : t_1

T_2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	10
t_2	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4	2
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
Γ	0	0	$-8\lambda - 6$	0	$2 - 4\lambda$	$4\lambda - 2$	$-40\lambda - 40$	

1^{er} critère : t_3

2^{ème} critère : t_2

T_3	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
t_3	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	-1	5	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
Γ	0	0	$-5\lambda - \frac{15}{2}$	$5\lambda - \frac{5}{2}$	0	0	$-20\lambda - 50$	

On a donc un bénéfice maximal de $50 + 20\lambda$ en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\Gamma = 50 + 20\lambda$

Si $\frac{1}{2} < \lambda$:

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	-2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
Γ	10	$20(\lambda + 1)$	0	0	0	0	0	

1^{er} critère : x_2

2^{ème} critère : t_1

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	0	2	
t_2	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	0	0	4	
t_3	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-1	1	0	
Γ	$\frac{10}{3} - \frac{20}{3}\lambda$	0	$-\frac{20}{3} - \frac{20}{3}\lambda$	0	0	0	$-40 - 40\lambda$	

On a donc un bénéfice maximal de $40 + 40\lambda$ en ayant vendu 0 articles A_1 et 2 article A_2 :

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$\Gamma = 40 + 40\lambda$

