

$$\max_x \Gamma$$

$$= \text{Adeline DUBOIS} x_1$$

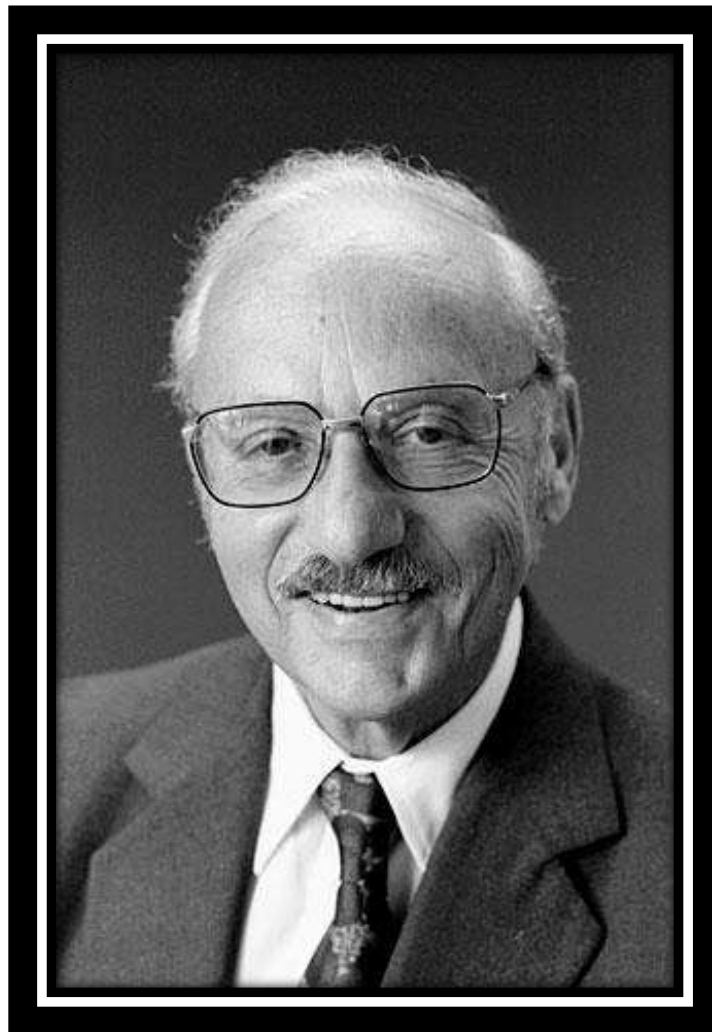
$$+ \text{Nicolas HUBERT} x_2$$

$$+ \text{Antonin LAPICHE} x_3$$



TAI

PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE LINÉAIRE



« Georges DANTZIG a créé l'algorithme du simplexe et est considéré comme le fondateur de la programmation linéaire. »

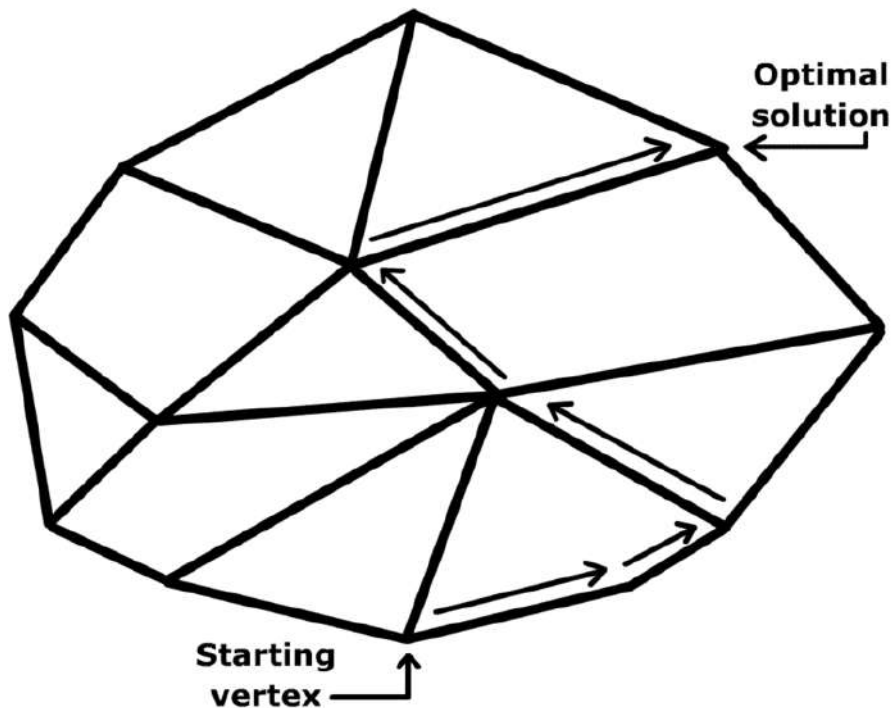
SOMMAIRE

Ecriture de la forme standard d'un PML quelconque	3
Exemple d'application	5
PML paramétrée	7

INTRODUCTION

La programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudie la résolution optimale de certains problèmes d'optimisation avec contraintes. Elle est utilisée, en particulier, dans l'industrie et dans la planification économique pour l'allocation de ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés. Les problèmes de programmation linéaire se résolvent grâce à l'algorithme du simplexe.

C'est pourquoi nous allons expliquer dans un premier temps la méthode, illustrée d'un exemple dans la deuxième partie, et complétée par l'ajout d'événements imprévus (PML paramétrée) dans une troisième partie.



« Polytope : représentation géométrique du cheminement de l'algorithme du simplexe »

METHODE DU SIMPLEXE POUR UN PROGRAMME LINEAIRE QUELCONQUE

ECRITURE DE LA FORME STANDARD D'UN PML QUELCONQUE

Dans le cas de la forme standard d'un PML toutes les équations sont des inégalités, ce qui sert pour la résolution du simplexe.

Comment écrire la forme standard ?

- Contrainte d'inégalité $\leq$

Prenons l'inégalité $x_1 + x_2 \leq 6$

Celle-ci devient : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$

x_3 est une variable d'écart (VE) ≥ 0 .

- Contrainte d'inégalité $\geq$

L'inégalité est alors : $x_1 + x_2 \geq 6$

Dans ce cas on ne pourra pas seulement introduire une variable d'écart (VE) x_3 telle que $x_1 + x_2 - x_3 = 6$.

En effet la solution initiale : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ entraîne $x_3 = -6 \leq 0$ ce qui est interdit.

On introduit alors une variable artificielle (VA) x_4 telle que l'équation devient : $x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 6$.

La solution initiale de cette équation est donc composée de trois variables hors-base : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ et d'une

variable dans la base : $x_4 = 6$.

- Contrainte d'égalité $=$

L'égalité est alors : $x_1 + x_2 = 6$.

Dans ce cas on introduit une variable artificielle (VA) x_3 telle que l'égalité devienne : $x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Le second membre étant positif ($6 > 0$), on met donc un signe positif devant la VA dans l'égalité.

La solution initiale de cette égalité composée de deux variables hors-base : $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ et d'une variable dans la base : $x_3 = 6$.

- La fonction économique Γ

On introduit d'abord une variable d'écart (VE) affectée d'un coefficient 0.

On introduit ensuite une variable artificielle (VA) affectée d'un coefficient M dont le signe variera en fonction que l'on recherche un minimum : +M, ou un maximum : -M. On choisit le coefficient M comme un très grand nombre positif afin que la solution finale donne une variable artificielle (VA) égale à 0.

En conclusion, la forme standard d'un PML quelconque se définit comme suit :

- Contraintes :

$\leq$	+ VE
$\geq$	- VE $\pm$ VA
=	$\pm$ VA

Avec : $\pm$ correspondant au signe du deuxième membre.

- Fonction économique :

Min et Max	0 x VE
Min	+M x VA
Max	-M x VA

Les critères de Dantzig dans le cas d'une recherche de minimum sont :

- La variable entrante (v.e.) correspond au coefficient le plus négatif dans la fonction économique.
- La variable sortante (v.s.) correspond au coefficient positif le plus petit dans R'.

EXEMPLE D'APPLICATION

Il s'agit de déterminer la production optimale d'un atelier qui fabrique deux types de produits, A1 et A2, en quantités x_1 et x_2 , dont le bénéfice après la vente des produits s'élève à $\Gamma = 10x_1 + 20x_2$. Les contraintes diverses (fabrication, vente...) se traduisent par le système d'inéquations simplifiées suivant :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Résolution :

$$\begin{cases} \Gamma = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + x_2 \leq 2 \end{cases}$$

On transforme ce problème en un problème de maximisation en changeant le signe de la fonction bénéfice puis on l'écrit sous forme standard : trouvons x_1 et x_2 tels que :

$$\begin{cases} \max_x \Gamma(x_1, x_2) = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 + t_1 = 6 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - t_3 + e_3 = 6 \end{cases}$$

Le tableau (T0) du simplexe est donc le suivant :

T0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
Γ	10	20	0	0	0	0	0	

1^{er} critère de Dantzig : x_2

2eme critère de Dantzig : t_1

Variables hors base : $\{x_1, x_2\}$

Variables dans la base : $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$

Comme les coefficients des variables hors base ne sont pas tous positifs ou nuls, cette base n'est pas optimale. On va donc effectuer un changement de base.

Nous allons faire rentrer dans la base la variable hors base dont le coût réduit le plus grand positif car nous recherchons un maximum : C'est x_2 .

Afin d'obtenir la forme canonique relative à la nouvelle base $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$, il faut faire subir aux lignes du tableau du simplexe des modifications (pivot).

On a donc le nouveau tableau (T1) du simplexe suivant :

T1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1/3	1	1/3	0	0	0	2	6
t_2	4/3	0	1/3	1	0	0	4	3
t_3	5/3	0	-1/3	0	-1	1	0	0
Γ	10/3	0	-20/3	0	0	0	-40	

1^{er} critère de Dantzig : x_1

2eme critère de Dantzig : t_2

Variables hors base : $\{x_1, t_1\}$

Variables dans la base : $\{x_2, t_2, t_3, e_3\}$

Cette base n'est pas optimale car la variable x_1 a un coût réduit strictement positif ($\frac{10}{3}$).

Cette variable x_1 doit donc rentrer dans la base.

La variable t_3 quitte la base pour laisser place à x_1 .

Afin d'obtenir la forme canonique relative à la nouvelle base $\{x_2, t_2, t_3, e_3\}$, il faut faire subir aux lignes du tableau du simplexe des modifications (pivot).

On a donc le nouveau tableau (T2) du simplexe suivant :

T2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
t_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	-5	
Γ	0	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	-50	

Variables hors base : $\{x_1, x_2\}$

Variables dans la base : $\{t_1, t_2, t_3, e_3\}$

Les coûts réduits de toutes les variables de la base sont maintenant négatifs ou nuls et, par conséquent, la solution est optimale et l'algorithme de termine.

On a donc un bénéfice maximal de 50 en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\Gamma(3,1) = 10 \times 3 + 20 \times 1 = 50$

Remarque : On arrive à ce résultat en utilisant 2 tableaux du simplexe.

PML PARAMETREE

Il s'agit ici de tester la robustesse de la décision optimale de production lorsqu'un des paramètres du problème varie à cause d'événements imprévus. On traitera successivement le cas des bénéfices unitaires 10 et 20 des produits A_1 et A_2 en utilisant la PML paramétrée qui consiste à remplacer le paramètre étudié P par $P(1 + \lambda)$ avec $\lambda > -1$ et à déterminer l'optimum de production suivant les valeurs de λ .

Résolution :

Les coefficients dans les contraintes et la fonction économique sont parfois mal connus : une petite variation de ces paramètres peut parfois modifier l'optimum, ce qui pose un problème quand par exemple cet optimum représente une décision de fabrication, une décision d'utilisation de ressources...

La technique de paramétrisation consiste à considérer un des coefficients comme un paramètre et à chercher l'optimum pour toutes les valeurs de ce paramètre ; on teste ainsi successivement chaque coefficient du problème.

Rappel du dernier tableau obtenu :

$T2$	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
t_3	0	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-1	1	-5	
Γ	0	0	$-\frac{15}{2}$	$-\frac{5}{2}$	0	0	-50	

Et le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \max_x \Gamma(x_1, x_2) = P_1 x_1 + P_2 x_2 = 10x_1 + 20x_2 \\ x_1 + 3x_2 + t_1 = 6 \\ x_1 - x_2 + t_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - t_3 + e_3 = 2 \end{array} \right.$$

1) Pour le paramètre P_1 :

On remplace le paramètre P_1 par $P_1 = 10(\lambda + 1)$ avec $\lambda > -1$.

L'écriture de Γ donne :

$$\begin{aligned}\Gamma(x_1, x_2) &= 10(\lambda + 1)x_1 + 20x_2 \\ \Gamma &= 10(\lambda + 1)\left(3 - \frac{1}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2\right) + 20\left(1 - \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right) \\ \Gamma &= \left(30 - \frac{10}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2\right)(1 + \lambda) + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2 \\ \Gamma &= 30 + 30\lambda - \frac{10}{4}t_1 - \frac{10\lambda}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2 - \frac{30\lambda}{4}t_2 + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2 \\ \Gamma &= t_1\left(-\frac{10}{4} - \frac{10\lambda}{4} - \frac{20}{4}\right) + t_2\left(-\frac{30}{4} - \frac{30\lambda}{4} + \frac{20}{4}\right) + 50 + 30\lambda \\ \Gamma &= \frac{10}{4}t_1(-1 - \lambda - 2) + \frac{10}{4}t_2(-3 - 3\lambda + 2) + 50 + 30\lambda \\ \Gamma &= \frac{10}{4}t_1(-3 - \lambda) + \frac{10}{4}t_2(-1 - 3\lambda) + 50 + 30\lambda\end{aligned}$$

Deux valeurs critiques apparaissent pour λ : $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$.

On élimine donc λ_1 car il est inférieur à -1.

Si $-1 < \lambda < -\frac{1}{3}$: On cherche à maximiser Γ sous les mêmes contraintes.

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	-2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
Γ	$10(\lambda + 1)$	20	0	0	0	0	0	

1^{er} critère de Dantzig : x_2

2^{ème} critère de Dantzig : t_1

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	0	0	2	
t_2	$4/3$	0	$1/3$	1	0	0	4	
t_3	$5/3$	0	$-1/3$	0	-1	1	0	
Γ	$10(\lambda + 1/3)$	0	$-20/3$	0	0	0	-40	

On a donc un bénéfice maximal de 40 en ayant vendu 0 article A_1 et 2 articles A_2 :

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 2$$

$$\Gamma = 10 \times 0 + 20 \times 2 = 40$$

Si $-\frac{1}{3} < \lambda$:

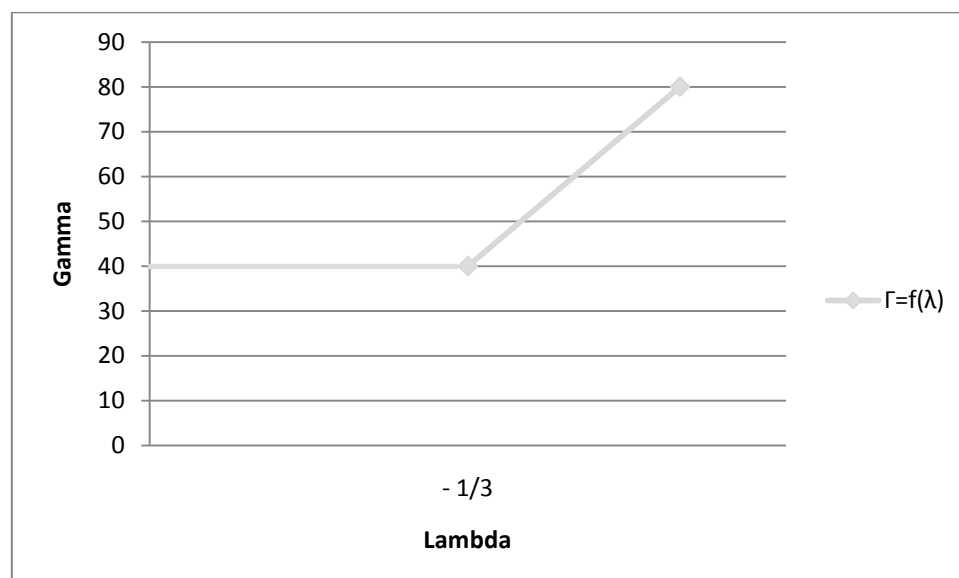
T_2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$1/4$	$-1/4$	0	0	1	
x_1	1	0	$1/4$	$3/4$	0	0	3	
t_3	0	0	$-3/4$	$-5/4$	-1	1	-5	
Γ	0	0	$\frac{-5\lambda - 15}{2}$	$\frac{-15\lambda - 5}{2}$	0	0	$-30\lambda - 50$	

On a donc un bénéfice maximal de $30\lambda + 50$ en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$$x_1 = 3$$

$$x_2 = 1$$

$$\Gamma = 30\lambda + 50$$



2) Pour le paramètre P_2 :

On remplace le paramètre P_2 par $P_2 = 20(\lambda + 1)$ avec $\lambda \geq -1$.

L'écriture de Γ donne :

$$\Gamma = 10x_1 + 20(\lambda + 1)x_2$$

$$\Gamma = 10\left(3 - \frac{1}{4}t_1 - \frac{3}{4}t_2\right) + (20 + 20\lambda)\left(1 - \frac{1}{4}t_1 + \frac{1}{4}t_2\right)$$

$$\Gamma = 30 - \frac{10}{4}t_1 - \frac{30}{4}t_2 + 20 - \frac{20}{4}t_1 + \frac{20}{4}t_2 + 20\lambda - \frac{20\lambda}{4}t_1 + \frac{20\lambda}{4}t_2$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-1 - 2 - 2\lambda) + \frac{10}{4}t_2(-3 + 2 + 2\lambda) + 50 + 20\lambda$$

$$\Gamma = \frac{10}{4}t_1(-3 - 2\lambda) + \frac{10}{4}t_2(-1 + 2\lambda) + 50 + 20\lambda$$

Deux valeurs critiques apparaissent pour λ : $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.

On élimine donc λ_1 car il est inférieur à -1.

Si $-1 < \lambda < \frac{1}{2}$: On cherche à maximiser Γ sous les mêmes contraintes.

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1	3	1	0	0	0	6	6
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	1
Γ	10	$20(\lambda + 1)$	0	0	0	0	0	

1^{er} critère de Dantzig: x_1

2^{ème} critère de Dantzig: t_3

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
t_1	0	$5/2$	1	0	$1/2$	$-1/2$	5	2
t_2	0	$-3/2$	0	1	$1/2$	$-1/2$	1	$-2/3$
x_1	1	$1/2$	0	0	$-1/2$	$1/2$	1	2
Γ	0	$20(\lambda + 3/2)$	0	0	5	-5	-10	

1^{er} critère de Dantzig: x_2

2^{ème} critère de Dantzig: t_1

T_2	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	10
t_2	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	4	2
x_1	1	0	0	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0
Γ	0	0	$-8\lambda - 6$	0	$2 - 4\lambda$	$4\lambda - 2$	$-40\lambda - 40$	

1^{er} critère de Dantzig: t_3

2^{ème} critère de Dantzig: t_2

T_3	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	0	1	
t_3	0	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{4}$	1	-1	5	
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0	3	
Γ	0	0	$-5\lambda - \frac{15}{2}$	$5\lambda - \frac{5}{2}$	0	0	$-20\lambda - 50$	

On a donc un bénéfice maximal de $50 + 20\lambda$ en ayant vendu 3 articles A_1 et 1 article A_2 :

$x_1 = 3$
$x_2 = 1$
$\Gamma = 50 + 20\lambda$

Si $\frac{1}{2} < \lambda$:

T_0	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	1	3	1	0	0	0	6	2
t_2	1	-1	0	1	0	0	2	-2
t_3	2	1	0	0	-1	1	2	2
Γ	10	$20(\lambda + 1)$	0	0	0	0	0	

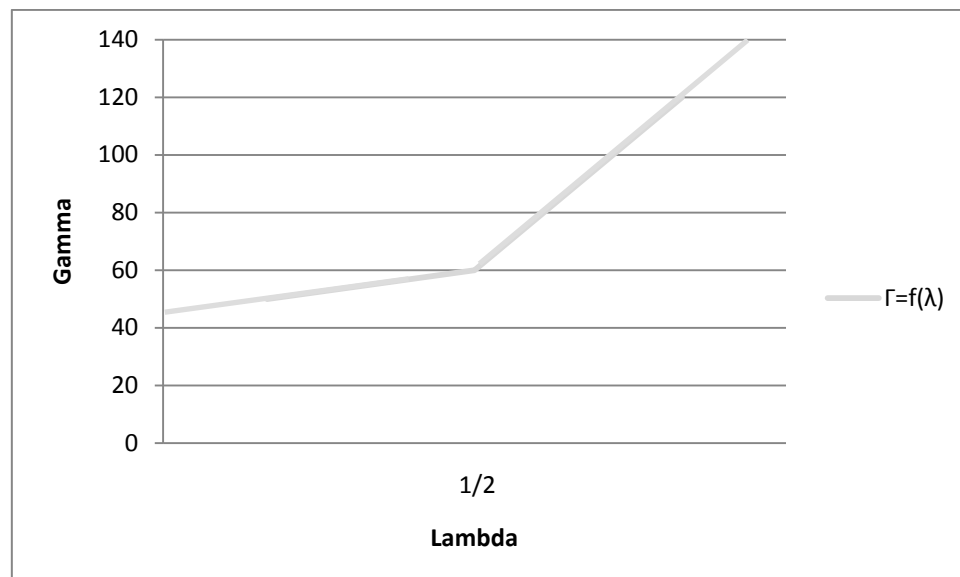
1^{er} critère de Dantzig : x_2

2^{ème} critère de Dantzig: t_1

T_1	x_1	x_2	t_1	t_2	t_3	e_3	R	R'
x_2	$1/3$	1	$1/3$	0	0	0	2	
t_2	$4/3$	0	$1/3$	1	0	0	4	
t_3	$5/3$	0	$-1/3$	0	-1	1	0	
Γ	$10/3 - 20/3\lambda$	0	$-20/3 - 20/3\lambda$	0	0	0	$-40 - 40\lambda$	

On a donc un bénéfice maximal de $40 + 40\lambda$ en ayant vendu 0 article A_1 et 2 articles A_2 :

$x_1 = 0$
$x_2 = 2$
$\Gamma = 40 + 40\lambda$



CONCLUSION

Ce TAI sur la Programmation Linéaire a été l'occasion d'approfondir notre cours d'Optimisation et Complexité en cherchant de nouvelles connaissances pour pouvoir appliquer la PML dans un cas quelconque ; avec tous types d'inégalités ou égalités et que l'on soit dans le cas d'une minimisation ou maximisation. L'important était de bien comprendre l'algorithme pour pouvoir l'appliquer dans les différents exemples.