Opti et Complexité

09-03-12

TD 6 : Recherche Opérationnelle

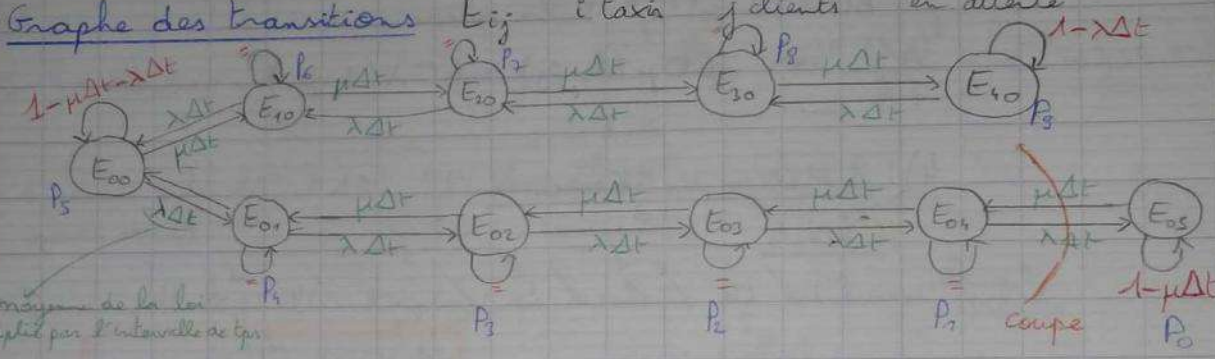
Exercice 1 : affluence à une station de taxis

Processus de naissance = processus markovien où individus apparaissent

mort = disparaissent

Graphe des transitions E_{ij} i taxis j clients en attente

1)



$\lambda \rightarrow$ taux clients, $\mu \rightarrow$ taux taxis.

2) régime permanent → le pt de départ n'a ⊕ d'influence. Par ailleurs les proba du graphe des transit° ne dépendent ⊕ de t.

Ls th des coupes : si je trace une coupe de mon graphe, la proba de sortir de la coupe est égale à celle d'y entrer.

$P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

ex : $P(E_{05} \text{ en } t \text{ et } E_{04} \text{ en } t+\Delta t) = P(E_{04} \text{ en } t \text{ et } E_{05} \text{ en } t+\Delta t)$

$\Leftrightarrow P(E_{04} \text{ en } t+\Delta t / E_{05} \text{ en } t) \cdot P(E_{05} \text{ en } t) = P(E_{05} \text{ en } t+\Delta t / E_{04} \text{ en } t) \cdot P(E_{04} \text{ en } t)$

régime permanent ↓

$\mu\Delta t \cdot p_0 = \lambda\Delta t \cdot p_1$

Conclu : $p_1 = \frac{\mu}{\lambda} p_0$

2e coupe : même raisonnement : $p_2 = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 p_0$ (...)

De ⊕ condit° de normalisat° : $p_0 + p_1 + \dots + p_9 = 1$

Suite géométrique :

$$p_0 \cdot \frac{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{10}}{1-\frac{\mu}{\lambda}} = 1 \qquad \lambda \neq \mu.$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p_0 = \frac{1-\frac{\mu}{\lambda}}{1-\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{10}}}$$

3) On a : 60μ taxis / h.

a) Quel est le nb horaire moyen de taxis qui ne s'arrêtent pas ?

↳ Etat E_{40} cad : $60\mu p_3$ qui ne s'arrêtent pas.

$60\mu(1-p_3)$ qui s'arrêtent.

b) 60λ clients / h.

$60\lambda p_0$ renoncent à attendre.

$60\lambda(1-p_0)$ font la queue.

c) $\Rightarrow$ $60\mu(1-p_3) = 60\lambda(1-p_0)$ taux moyen

4) Notation de Kendall

Clients

loi des arrivées → M / M / 1 / 5 / ∞ / FIFO

nb de serveurs ; nb limite de la file ; loi de passage

loi tps de service ; total individus possible ∞

M / M / 1 / 4 / ∞ / FIFO

Exercice 2 :

1) $\alpha = (0\times 2 + 1\times 9 + 2\times 14 + \dots + 10\times 1 + 11\times 0) \times \frac{1}{100}$

$\boxed{\alpha = 3,93 \approx 4}$ → 30 minutes

Les arrivées suivent une loi de Poisson de paramètre : $\lambda = 8/h$

2) $\beta = \frac{0,5\times 35 + 1,5\times 18 + \dots + 9,5\times 1}{100}$

$\boxed{\beta = 2,43 \approx 2,5}$

Le tps de service suit une loi Exponentielle de paramètre : $\mu = 2,4/h$.

3) a/ Notat° de Kendall :

M / M / 1 / ∞ / ∞ / FIFO

↑ 1 guichet

$\overline{W_a}$ → tps moyen passé de la file d'attente.

$\overline{W}$ → ——————— l'organisme.

$$\overline{W_a} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{48} = 1\,\text{min}\,15$$

$$\overline{W} = \overline{W_a} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 3\,\text{min}\,45$$

b) • Proba que 0 client arrive entre 15^h et 16^h — $d=1$ $\lambda=8$ $k=0$

↳ ne dépend que du tps écoulé : $P(b) = e^{-\lambda d}\frac{(\lambda d)^1}{k!} = \boxed{e^{-8} \approx 3{,}35.10^{-4}}$

$d=1$ $k=6$

• 6 clients entre 16^h et 17^h : $P(\sim) = e^{-8}\frac{8^6}{6!} = \boxed{12{,}2\,\%}$

c) Durée pdt laquelle l'employé ne s'occupe de personne ?

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$$ ici $p_0 = \frac{2}{3}$

Donc 40 min

d) On cherche p_5 : $\boxed{p_5 = \ldots = 0{,}27\,\%}$

e) Proba tps passé ds l'organisme ⩾ à un quart ?

$$P(W > 1/4) = 1 - P(W < 1/4) =$$
$$= 1 - (1 - e^{-(\mu-\lambda)\times\frac{1}{4}})$$
$$= e^{-4}$$
$$\boxed{= 1{,}83\,\%}$$