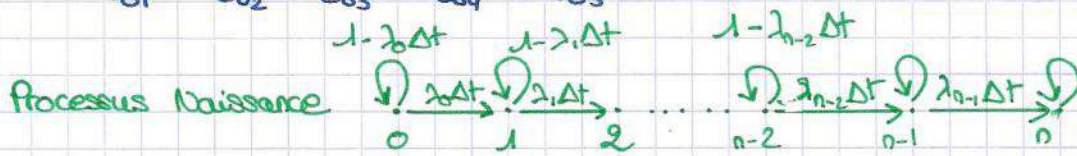


Exercice 1: Etude de l'affluence à une station de taxis

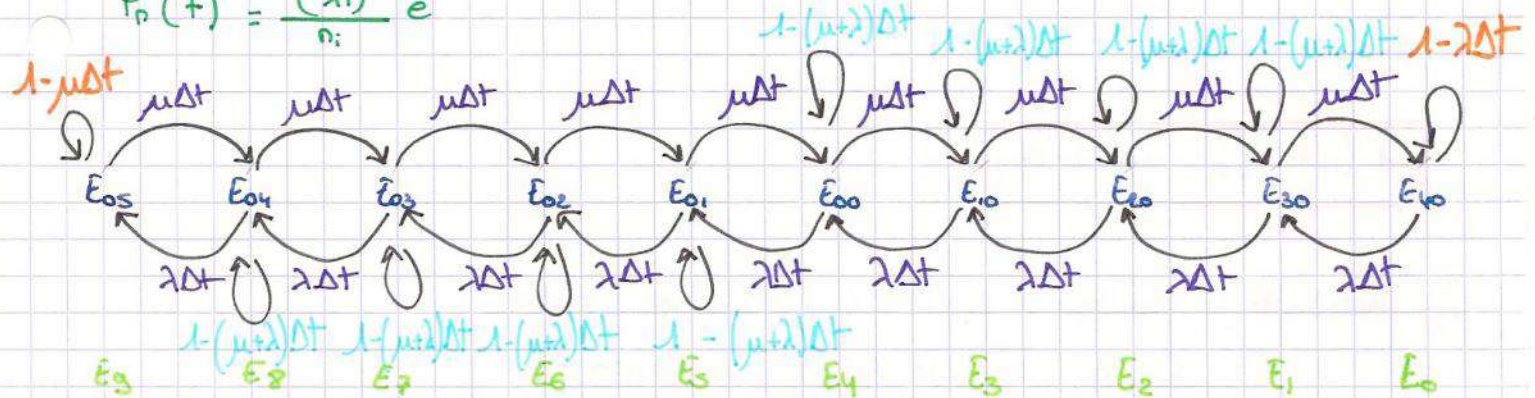
- 1) E_{ij} état pour lequel i taxis et j clients sont à l'attente
 E_{00} E_{10} E_{20} E_{30} E_{40} $\rightarrow$ loi de Poisson λ
 E_{01} E_{02} E_{03} E_{04} E_{05} $\rightarrow$ loi de Poisson μ



$$(P(N_{t+\Delta t} = k+1 | N_t = k) = \lambda_k \Delta t$$

hyp: $\lambda_k = \lambda \forall k$.

$$P_0(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$



2) $E_0 = \mu P_1 = \lambda P_0$

$E_1 = \mu P_2 = \lambda P_1$

$E_2 = \mu P_3 = \lambda P_2$

...

$E_{n-1} = \mu P_n = \lambda P_{n-1}$

$$\underbrace{\mu \times \mu \dots}_{n \text{ fois}} P_n = \underbrace{\lambda \times \lambda \dots}_{n \text{ fois}} P_0$$

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$\sum_{i=0}^n P_i = 1$$

$$= P_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right)$$

$$1 = P_0 \times \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

3) $\mu = 1$ arrivée taxis / min
 $\lambda = 1,2$ arrivée clients / min

• $P_0 = 3,85\% \rightarrow$ Probabilité que la station soit complète

• $P_9 = 19,87\% \rightarrow$ Probabilité qu'il y ait 5 clients à l'attente

• Nombre moyen de taxis ne s'arrêtant pas à la station :

$$\underline{60\mu \times P_0 = 2,3}$$

• Nombre moyen de clients rejoignant à l'attente :

$$\underline{60\lambda \times P_9 = 14,3}$$

• En moyenne / heure

$$60\lambda = 72 \text{ clients} \rightarrow 14,3 \text{ partent} \rightarrow 57,7 \text{ restent} \Leftrightarrow 60\lambda - 60\lambda P_9$$

$$60\mu = 60 \text{ taxis} \rightarrow 2,3 \text{ partent} \rightarrow 57,7 \text{ restent} \Leftrightarrow 60\mu - 60\mu P_0$$

$$\boxed{\lambda(1-P_9) = \mu(1-P_0)}$$

4) Kendall : clients : M / M / 1 / 5 / ∞ / FIFO $\rightarrow$ règle de service

taxis : M / M / 1 / 4 / ∞ / FIFO

Exercice 2 : Attente dans un organisme public

$$1) \alpha = \frac{1}{100} (2 \times 0 + 9 \times 1 + 14 \times 2 + \dots + 1 \times 10 + 0 \times 11)$$

$$\alpha = 3,93 \approx 4$$

$$m = 4$$

$$P(X=k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m} \quad \text{avec } m = \alpha = 4$$

R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$100 \times P(X=R)$	1,83	7,33	14,65	19,54	19,54	15,63	10,42	5,95	3,98	1,32	0,5	0,28
	9,16								5,13			

Obs. 11 14 19 20 15 11 5 5

$$\chi^2 = \sum_{\text{classe}} \frac{(n_{\text{obs}} - n_{\text{theo}})^2}{n_{\text{theo}}}$$

↳ ≥ 5 observations
5% erreur

$$\chi^2 = 0,65 \quad \text{nb. de degré de liberté : } 8 - 1 - \text{nb paramètre} \Rightarrow 6$$

$$\chi^2 < 12,6 \text{ pour } 5\% \text{ d'erreur}$$

3) a) . Notation de Kendall :

$$M/M/1 \quad (1/\infty/\infty/\text{FIFO})$$

. Temps moyen dans la file d'attente :

$$W_q = \frac{1}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{48} = 1 \text{ min } 5$$

. Temps moyen dans l'organisme :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{16} = 3 \text{ min } 45$$

b) . $P(0 \text{ arrivée entre } 15\text{h et } 16\text{h}) \rightarrow$ ne dépend pas de l'heure mais de la durée

$$P(0) = e^{-\lambda d} \frac{(\lambda d)^0}{0!} = e^{-\lambda} = 3,35 \cdot 10^{-4}$$

$$P(6) = e^{-\lambda d} \frac{(\lambda d)^6}{6!} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^6}{6!} = 0,122$$

c) En régime permanent :

$$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{6} ?$$

$$d = \frac{2}{3} \times 60 = 40 \text{ min} \rightarrow 50 \text{ min}$$

$$d) P(N=4) = P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^5 P_0 = 0,27\%$$

e) W : bi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda = 10/h$

$$P(W < 15 \text{ min}) = 1 - e^{-(\mu - \lambda)t}$$

$$P(W > 15 \text{ min}) = 1 - P(W < 15 \text{ min}) = 1,83\%$$