

TD6 de Recherche Opérationnelle

Exercice 1 : étude de l'affluence à une station de taxis (Roseaux, tome 2)

Une station de taxis permet à 4 taxis au maximum de se garer pour attendre des clients. Les taxis arrivent à hauteur de la station aléatoirement suivant une loi de Poisson de taux μ (taxis / minute) : lorsque la station est complète le taxi poursuit sa route, sinon il s'y arrête pour attendre un client derrière le dernier taxi en attente.

Les clients arrivent aléatoirement suivant une loi de Poisson de taux λ (clients / minute), ils font éventuellement la queue et sont pris en charge dans l'ordre de leur arrivée ; toutefois, on a observé que lorsque 5 clients attendent déjà, tout nouveau client arrivant renonce à attendre. La durée de prise en charge d'un client par taxi est négligeable.

1. Associer à ce problème un processus de naissance et mort ; on notera E_{ij} l'état pour lequel i taxis et j clients sont en attente (nécessairement i ou j sont nuls). Dessiner et valuer le graphe des transitions.
2. Calculer les probabilités des états en régime permanent ; on pourra renuméroter ceux-ci (on suppose $\lambda \neq \mu$).
3. Application numérique : $\mu = 1$ arrivée de taxis / mn et $\lambda = 1,2$ arrivée de clients / mn. Quel est le nombre horaire moyen de taxis arrivant à la station sans pouvoir s'y arrêter ? Quel est le nombre horaire moyen de clients qui renoncent à attendre ? Déterminer une relation traduisant le fait qu'en régime permanent le taux moyen d'arrivée des clients attendant à la station est égal au taux moyen de départ en taxi de ces clients.
4. Donner la notation de Kendall de la file constituée par les clients, par les taxis.

Exercice 2 : attente dans un organisme public (Roseaux, tome 2)

Un organisme public est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9 h à 17 h sans interruption.

1. Une étude statistique a tout d'abord consisté en un relevé des arrivées d'usagers pendant 100 périodes de 30 mn prises au hasard parmi les heures d'ouverture (après s'être assuré de la stationnarité du processus des arrivées au cours de la journée : les différentes heures sont identiquement chargées). Voici le relevé :

nombre d'arrivées k en 30 mn	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
nombre d'observations	2	9	14	19	20	15	11	5	3	1	1	0

Calculer la moyenne α de cette statistique (en nombre d'arrivées par 30 mn) ; l'arrondir à l'entier le plus proche, soit m . On admet alors qu'un test du khi2 permettrait de vérifier que la loi des arrivées est une loi de Poisson de moyenne $m = 4$.

2. Une autre étude statistique a porté sur la durée du service. A 100 reprises, consécutives ou non, mais prises dans la période stationnaire, on relève la durée du service, c'est à dire le temps passé par un client au guichet. Les résultats obtenus sont les suivants :

durée du service en mn	< 1	1 à 2	2 à 3	3 à 4	4 à 5	5 à 6	6 à 7	7 à 8	8 à 9	9 à 10	> 10
nb de services observés	35	18	17	9	7	6	3	3	1	1	0

Calculer la durée moyenne $1/\mu$ du service. Comme précédemment, on admet alors qu'un test du khi2 permettrait de vérifier que la loi du service peut être supposée exponentielle de paramètre $\mu = 24$ services / heure (durée moyenne 2' 30").

3. Un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager. Les usagers, si nécessaire, font la queue dans l'ordre de leur arrivée ; même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager. On suppose que le régime permanent est rapidement atteint.
- Donner la notation de Kendall de cette file d'attente, le temps moyen $\overline{W}_Q$ passé à attendre dans la file, et le temps moyen $\overline{W}$ passé dans l'organisme par chaque usager.
 - Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15 h et 16 h, que six clients arrivent entre 16 h et 17 h ?
 - Quelle est, en moyenne et par heure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
 - Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers derrière celui en cours de service ?
 - Quelle est la probabilité qu'un usager passe plus d'un quart d'heure dans l'organisme ?