

TD7-8 de Recherche Opérationnelle

Exercice 1 : organisation d'un magasin d'outillage (Roseaux, tome 2)

L'usine Laveblanc fabrique des machines à laver. Elle occupe un millier d'ouvriers et produit 6 types différents de machines. La production s'effectue en séries de taille moyenne et nécessite un outillage très diversifié ne permettant donc pas de laisser en permanence aux ouvriers tous les outils qui leur seraient nécessaires : ces nombreux outils sont rangés dans un magasin d'outillage situé dans le hall de montage de l'usine. De ce fait on constate malheureusement la formation de files d'attente d'ouvriers devant les guichets-comptoirs du magasin. Le nombre de magasiniers assurant la distribution des outils influence, naturellement, le temps d'attente. S'ils sont trop nombreux, les attentes seront réduites, voire nulles : il semble bien inutile alors de payer des magasiniers la plupart du temps inactifs. Si, au contraire, ils sont en nombre insuffisant, les attentes deviendront fréquentes, longues et coûteuses (en manque à gagner sur la production non effectuée).

Ainsi apparaît un problème économique : combien doit-on prévoir de magasiniers pour distribuer les outils de manière que le coût du temps perdu à attendre par les ouvriers, d'une part, augmenté du coût du temps d'inactivité des magasiniers soit minimal ? Le prix de revient horaire d'un magasinier a été évalué à 10 € / heure, celui du manque à gagner sur production non effectuée par un ouvrier en attente à 20 € / heure.

Précisons l'organisation du magasin. La file d'attente est unique : dès qu'un magasinier a servi un ouvrier, celui qui est en tête de la file d'attente le remplace immédiatement. Les ouvriers se rangent dans la file dans l'ordre d'arrivée. La direction de Laveblanc a fait procéder à des mesures, exploitées ensuite par un statisticien : en moyenne 96 ouvriers se rendent au magasin chaque heure ; en outre il a observé que a) l'arrivée d'un ouvrier est indépendante de celle d'un autre, b) il n'arrive jamais 2 ouvriers ou plus simultanément, c) le taux moyen des arrivées ne fluctue pas dans le temps. Ces 3 propriétés permettent de conclure que les arrivées aléatoires des ouvriers suivent une loi de Poisson (de taux $\lambda = 96$ arrivées / heure).

Par ailleurs, l'étude des temps passés par les magasiniers à servir les ouvriers a permis de conclure que la loi de durée des services est une loi exponentielle de taux $\mu = 54$ services / heure (pour un magasinier donné).

1. Donner la notation de Kendall de ce phénomène d'attente ; on notera m le nombre de magasiniers. Quelle est la plus petite valeur de m telle que la file d'attente ne s'allonge pas indéfiniment ?
2. La durée de la journée de travail est de 8 heures : combien d'ouvriers se présentent-ils, en moyenne, au magasin d'outillage par jour ? Quel est le temps total passé par les magasiniers à les servir ? En supposant qu'il y ait 2, puis 3, puis 4, puis 5 magasiniers, évaluer dans chacun des cas la durée journalière globale d'inactivité des magasiniers, puis son coût.
3. En utilisant l'abaque jointe, trouver l'attente moyenne par ouvrier selon que $m = 2, 3, 4$ ou 5 . Déterminer la durée totale d'attente journalière, puis son coût dans chacun des cas.

4. Déterminer le nombre de magasiniers qui minimise la somme du coût d'attente totale journalière et du coût de l'inactivité totale journalière. Montrer qu'alors en moyenne l'un au moins des magasiniers est inactif.
5. On suppose désormais que l'absentéisme des magasiniers fait que, sur un effectif de m , dans 90 % des cas il y a m présents et dans 10 % des cas, $m-1$; l'absentéisme est négligeable au plan de la demande d'outils par les ouvriers. Montrer qu'alors il vaut mieux embaucher 4 magasiniers, les absents percevant leur salaire.

Exercice 2 : production optimale d'un atelier (Roseaux, tome 3)

Un atelier peut fabriquer deux types d'articles : l'article A_1 à la cadence de 35 objets à l'heure et l'article A_2 à la cadence de 45 objets à l'heure. Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire pour l'article A_1 est de 60 € par objet, et pour l'article A_2 de 40 € par objet. Ces objets sont vendus en totalité à des grossistes ; on a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4900 objets du type A_1 , ni plus de 5400 objets du type A_2 .

1. Ecrire le programme linéaire correspondant à la recherche d'un bénéfice maximum ; on notera x_1 et x_2 les nombres d'articles de types A_1 et A_2 fabriqués. Déterminer graphiquement la production optimale de l'atelier.
2. Retrouver le résultat précédent par l'algorithme du simplexe (méthode des tableaux).
3. On suppose que le bénéfice unitaire pour l'article A_1 n'est pas déterminé avec précision et qu'il s'écrit $60(1 + \lambda)$ avec $\lambda > -1$; déterminer l'optimum de production suivant les valeurs de λ (programmation mathématique linéaire paramétrée).

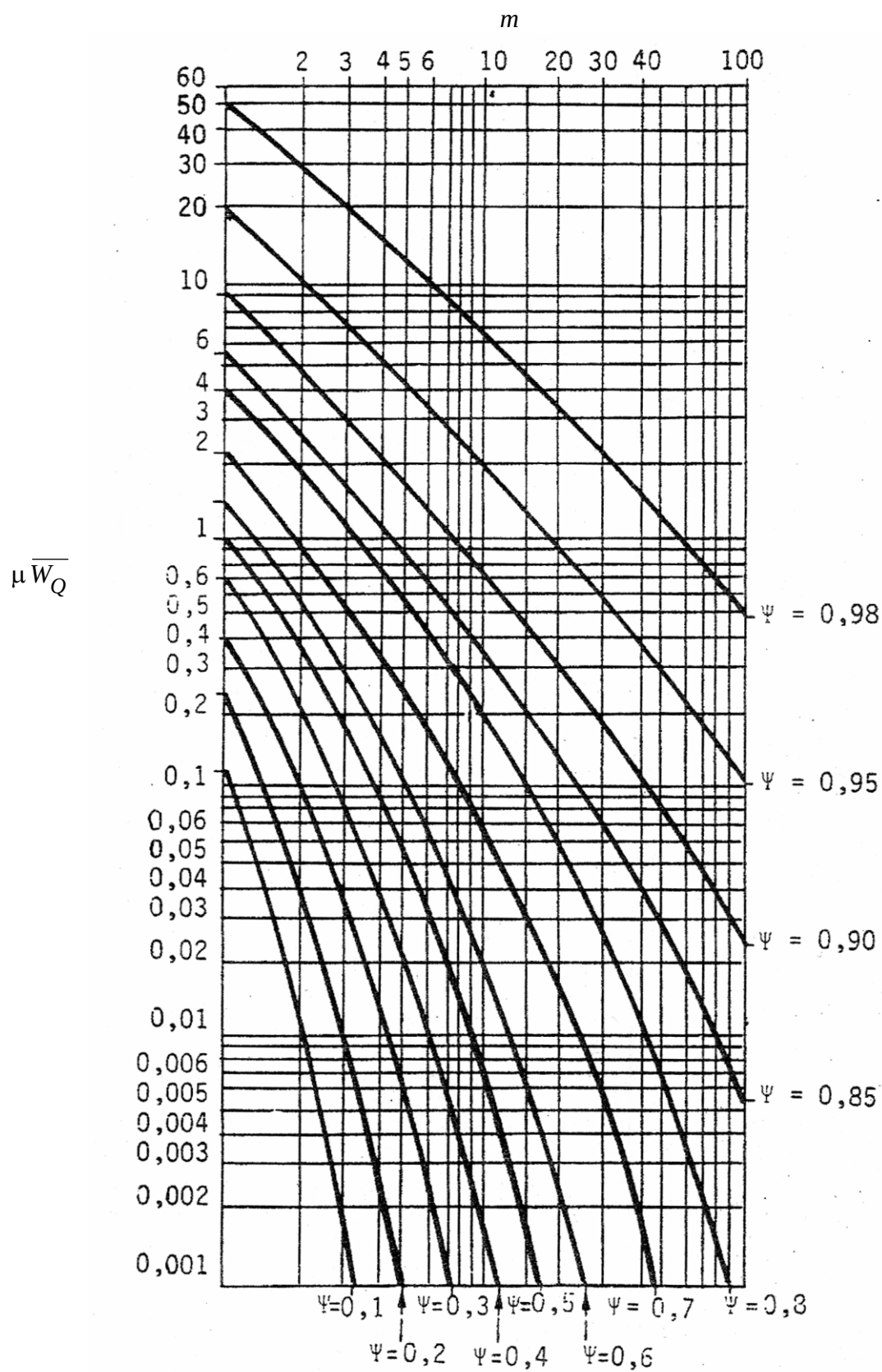
Exercice 3 : algorithme du simplexe avec variables artificielles

1. Résoudre, par la méthode des tableaux, le programme linéaire suivant

$$\text{Min } \Gamma = 10 x_1 + 30 x_2 \text{ sous les contraintes : } \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 6x_1 + x_2 \geq 6 \end{cases}$$

2. Même question en rajoutant la contrainte $x_2 \geq 2$.

Abaque donnant le temps moyen d'attente $\overline{W}_Q$ dans la file d'attente M/M/m



$$\Psi = \frac{\lambda}{m\mu}$$