

TDS

	M	N	O	P	R	S	T	
A	1	1	0	0	1	1	1	X
B	0	0	1	1	1	1	1	X
C	1	1	0	1	0	1	1	X
D	0	0	1	1	1	1	0	X
E	0	1	1	1	0	1	0	X
F	0	0	1	1	1	1	0	X
G	1	1	0	1	1	0	1	
	X	X	X	X	X		X	
	F	F	C	A	E		F	

- Marquage lignes / colonnes
- Marquer les lignes sans 0
 - Marquer une colonne avec 0 sur une ligne marquée
 - Marquer une ligne avec 0 sur une colonne marquée

Si toutes les colonnes sont marquées
 $F \rightarrow N$

Sinon — sur les lignes non marquées
 sur les colonnes marquées

$d = \min$ des valeurs non rayées (> 0)
 ligne rayée $+d$ colonne non rayée $-d$

2 traits : $+d$
 1 trait : $=$
 0 trait : $-d$

	M	N	O	P	R	S	T	
A	1	1	0	0	1	0	1	X
B	0	0	1	1	1	0	1	X
C	1	1	0	1	0	0	1	X
D	0	0	1	1	1	0	0	X
E	0	1	1	1	0	0	0	X
F	0	0	1	1	1	0	0	X
G	2	2	1	2	2	0	2	X
	X	X	X	X	X	X	X	
	F	F	C	A	E	F	F	

Obtention de la solution optimale

Prendre une colonne marquée sans 0

Conclusion

- AP
- BM
- CO
- DN
- ER
- FT
- GS



Exercice II

	A	B	C	D	
a	50	10	0	0	60 10
b	0	30	0	0	30
c	0	35	30	25	80 55 25
d	0	0	0	10	10
	50	75	30	35	
		65			
		35			

$$\text{Coût} : 50 \times 11 + 10 \times 12 + 30 \times 16 + 35 \times 21 + 30 \times 20 + 25 \times 22 = 3035$$

Sol de base ? $(m-1) \cdot (n-1) \cdot 203 = 9 \cdot 203 = 1827$ ok

Bleu - Hommes

Différence des deux
plus faible coût de la
ligne ou la colonne



	A	B	C	D	
a	11	12	10	10	0 1
b	17	16	15	18	1
c	19	21	20	22	1
d	25	25	25	25	0
	8	4	8	8	
		8	5		
		6	4		

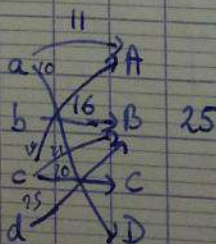
	A	B	C	D	
a	25	0	0	35	60 25
b	0	30	0	0	30
c	25	35	30	0	90 65 25
d	0	10	0	0	10
	50	75	30	35	
	25	45			

$$\text{Coût} = 25 \times 11 + 35 \times 10 = 2815$$

Sol de base ? 9 lignes ok

Recherche du plan de transport optimal alg de stepping-stone

	A	B	C	D	
a	25	11	12	10	35
b	17	16	15	18	
c	19	21	20	22	
d	25	10	25	25	0



$$S_{xy} = C_{xy} + U_x - U_y$$

$$S_{aA} = 25 + 0 - 13 = 12 \quad S_{bD} = 5$$

$$S_{dC} = 1$$

$$S_{aB} = -1$$

$$S_{dD} = 3$$

$$S_{aC} = -2$$

$$S_{cD} = 4$$

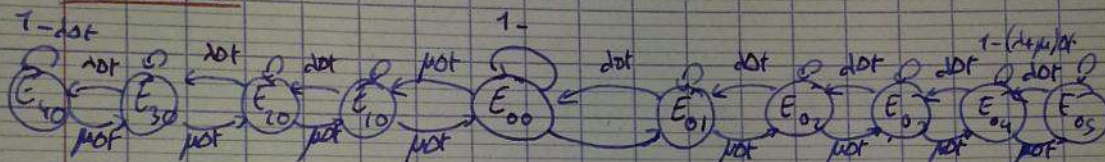
$$S_{bA} = 3$$

$$S_{bC} = 0$$

	A	B	C	D	
a	2 11	1 12	25 10	35 10	14
b	3 17	30 16	0 15	3 17	9
c	50 19	35 21	20 20	2 22	4
d	2 25	10 25	1 25	1 25	0
	23	25	24	24	✓+

TD6

Exercice I



$$\begin{aligned} \text{En } E_0 \quad \mu p_1 &= \lambda p_0 \\ E_0 E_1 \quad \mu p_2 &= \lambda p_1 \\ \mu p_m &= \lambda p_{m-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu^m p_m &= \lambda^m p_0 \\ p_m &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Que vaut } p_0? \quad \sum_{i=0}^9 p_i &= 1 = p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^9 p_0 \\ &= p_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^9\right) \\ &= p_0 \left(\frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}\right) = 1 \quad p_0 = \frac{1 - \frac{\lambda}{\mu}}{1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{10}} \end{aligned}$$

$\mu = 1$ arrivée de taxi / min
 $\lambda = 1,2$ arrivée de client / min

$$p_0 = \left(\frac{1 - 1,2}{1 - (1,2)^{10}}\right) = 3,85\%$$

Proba que la station soit pleine de taxis.

$$P_g = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 = 19,87\%$$

nb moyens de taxis qui ne s'arrêtent à la station

$$60\mu \quad P_0 = 2,3 \text{ taxi/h}$$

nb moyens de taxis qui ne s'arrêtent à la station. $60 \times d \quad P_g = 14,3 \text{ taxis/h.}$

$$\text{Par heure. } 60 \times d = 72 \text{ clients} \rightarrow 14,3 \text{ partent}$$

$\rightarrow 57,7 \text{ attendent}$

$$60 \times \mu = 60 \text{ taxis}$$

$\rightarrow 2,3 \text{ partent}$

$\rightarrow 57,7 \text{ attendent}$

$$\left. \begin{array}{l} 60d - 60dP_g \\ 60\mu - 60 \end{array} \right\}$$

$$2(1 - P_g)/\mu(1 - P_0)$$

après simplification $60d - 60dP_g = 60\mu - 60\mu P_0$

$$2(1 - P_g) = \mu(1 - P_0)$$

4.) Notation Kendall: M/M/1/S/FIFO

Pour Client: M/M/1/S

Pour Taxi: M/M/1/4

Exercice II

cf tableau

$$\lambda = \frac{1}{100} (2 \times 8 + 1 \times 9 + 2 \times 14 + \dots + 11 \times 0) = 3,8$$

$$P(X=k) = \frac{m^k}{k!} \exp(-m)$$

$$\lambda \cdot P(X=k) = 1,83 \quad 7,53 \quad 14,65 \quad 19,54 \quad 19,54 \quad 15,63 \quad 10,42 \quad 5,95 \quad 2,98$$

$$\hookrightarrow 1,32 \quad 0,53 \quad 0,77$$

$$\chi^2 = \sum_{\text{dans } m_{\text{théo}}} \left(\frac{m_{\text{obs}} - m_{\text{théo}}}{m_{\text{théo}}} \right)^2 = 9,63$$

$$(\chi^2) = \text{nb de classe} - 1 - \text{nb paramètre} = 6$$

↪ marge d'erreur de 5%

Notation de Kendall: $\Pi / M / 1$ [$1/\infty/\infty / \text{FIFO}$]

Taux moyen d'attente dans la file: $w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{0,1} = 1'15''$

Temps d'attente dans l'organisme:

$$W = w_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0,1} = \frac{1}{10} = 3'45''$$

$P(0 \text{ arrive entre 15 et 16 heures})$: indépendant de l'heure → mais durée importante

$$P_m = e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda^m}{m!} \right)$$

$$m=0 \Rightarrow P_0 = e^{-4} \frac{(4)^0}{0!} = e^{-4} = 3,35 \cdot 10^{-4}$$

$P(\text{arrive entre 16 et 17h})$

$$P_6 = e^{-4} \frac{(4)^6}{6!} = 12,2\%$$

la probabilité d'avoir n personnes dans le système d'attente en régime permanent $P_n = \frac{(\lambda)^n}{n!} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)$

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3} + 60 = 40 \text{ min}$$

Notation de Kendall M/M/1 [$\infty/\infty/\text{FIFO}$]

Taux moyen d'attente des la file $\bar{w}_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1}{98} = 1'15''$

Temps d'attente dans l'organisme $\bar{w} = \bar{w}_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{18} = 3'45''$

Temps d'attente w loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda = 10/h$
 $P(w < 15) = 1 - e^{-\frac{10 \times 15}{1}} \rightarrow P(w > 15) = e^{-15} = 1,83\%$

TD 7-8

Exercice I

1) M/M/m [$\infty/\infty/\text{FIFO}$]
 loi poisson λ clients
 loi expo μ nb employés (capacité)

$\lambda = 36$ clients / h
 $\mu = 54$ services / h
 m | mm engagement ?

$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$ avec m + petit entier vérifiant $\rho < 1$

$\Rightarrow m = 2$

2) Durée du travail 8h/j

nb moyen d'clients se présentant $8 \times \lambda = 768$

temps total pour à servir $\frac{768}{\mu} = 14,22 \text{ h (91200'')}$

nb magouiniens

2

3

4

5

densité d'inactivité

$$8h \times 2 - 14,22h \Rightarrow 6400''$$

$$8h \times 3 - 14,22h \Rightarrow 35200''$$

$$8h \times 4 - 14,22h \Rightarrow 64000''$$

$$8h \times 5 - 14,22h \Rightarrow 92800''$$

Coût d'inactivité 10€/h

17,77€

97,77€

177,77€

257,77€

$$3) \bar{w}_k = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\bar{w}_k = \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{\mu m!} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)}, P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^m \frac{1}{m!} \left(\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \right)}$$

m	$\Psi = \frac{\lambda}{\mu}$	$\mu \bar{w}_k$ (cabasq)	$\mu \bar{w}_0$ (formule)	$\bar{w}_0$	coût / camion 200€/h	coût total
2	0,889	4	3,765	251''	1,39€	1070€
3	0,593	0,28	0,292	19,8''	0,10€	77€
4	0,444	0,055	0,056	3,73''	0,021€	16€
5	0,350	0,013	0,014	0,9''	0,004€	3€

coût attente + coût inactivité

$$1070 + 17,77$$

$$77 + 97,77 \quad] \quad m=3$$

$$16 + 177,77$$

$$3 + 257,77$$

4)

m=3

Coût d'attente

$$0,9 \times 77 + 0,1 \times 1070 +$$

Coût d'inactivité

$$97,77 \times 774$$

m=4

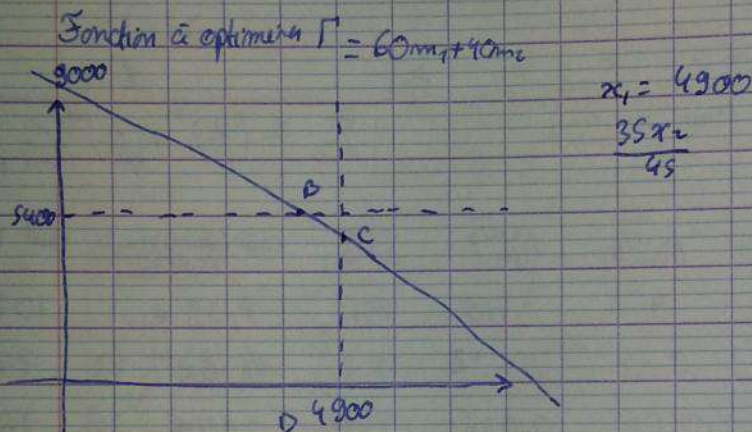
$$0,9 \times 16 + 0,1 \times 77 + 177,77 \times 200$$

m=5

$$0,9 \times 3 + 0,1 \times 16 + 257,77 \times 262$$

Exercice II

$$1) \begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ x_1 \leq 4900 \\ x_2 \leq 5400 \\ \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{45} \leq 200 \end{cases}$$



VE

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4900 \\ x_2 + x_4 = 5400 \\ \frac{x_1}{35} + \frac{x_2}{45} + x_5 = 200 \end{cases}$$

$$\Gamma = 60x_1 + 40x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

T0

B \ HB	x_1	x_2	.	.	.	R	R'
x_3	1	0	1	0	0	4900	4900
x_4	0	1	0	1	0	5400	∞
x_5	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{45}$	0	0	1	200	7000
Γ	60	40	0	0	0		

2^{re} itération de Dantzig

$$x_3 = \frac{1}{35} x_1$$

1^{re} itération de Dantzig

T1

B \ HB	.	x_2	x_3	.	.	R	R'
x_1	1	0	1	0	0	4900	
x_4	0	1	0	1	0	5400	
x_5	0	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{35}$	0	1	60	
Γ	0	40	-60	0	0	-239000	