

Exercice 1 : quelles usines construire ? (Roseaux, tome 1)

Un groupe envisage d'investir dans 5 projets d'usine désignées par A, B, C, D, E ; son but est de pouvoir fabriquer 4 produits P_1, P_2, P_3, P_4 . La fabrication du produit P_1 nécessite la construction de l'usine E ou bien encore des 2 usines B et D ; celle du produit P_2 nécessite la construction de l'usine D ou bien des usines A et C ; celle du produit P_3 nécessite la construction des usines A et B ou encore des usines C et E ; enfin la fabrication du produit P_4 peut être réalisée par l'usine C ou bien par les usines D et E.

Certaines contraintes techniques relient les projets d'usine :

- si l'on construit l'usine E, il faut aussi construire l'usine C
- si l'on construit les usines B et C, il est nécessaire de construire aussi l'usine D ou bien les 2 usines A et E.

L'investissement pour chacune des usines A, B, C, D, E s'élève respectivement à 6, 4, 7, 3 et 8 millions d'euros.

1. Chaque produit peut être fabriqué par une usine ou une combinaison d'usines. Exprimer chacune de ces possibilités en associant une variable booléenne à chaque usine ; on notera cette variable par la lettre minuscule associée à la désignation de l'usine (exemple : pour l'usine A, $a = 1$ si A est construite, 0 sinon). On obtient donc pour l'instant 4 équations booléennes dont le second membre vaut 1 puisque l'on veut fabriquer les 4 produits.
2. Pour les 2 contraintes techniques, dresser la table de vérité de l'implication logique $X \Rightarrow Y$ et montrer que l'implication se traduit en algèbre de Boole par $\bar{x} + y = 1$. Utiliser ce résultat pour exprimer les contraintes techniques.
3. La condition nécessaire et suffisante pour que les 6 équations booléennes qui correspondent au problème soient vérifiées est que leur produit soit égal à 1. Ecrire ce produit, le simplifier et interpréter le résultat. Trouver le minimum de l'investissement et les usines à construire.

Exercice 2 : un problème de stocks (Roseaux, tome 1)

La demande d'un équipement important en janvier, février et mars est de 2 unités, les 2 unités étant livrées à la fin de chaque mois. Le fabricant souhaite établir le plan de production de cet équipement.

Le stock ne peut dépasser 2 unités en février et mars, et est nul en janvier et avril. La production maximale pour un mois donné est de 4 unités. Pour un stock de i équipements et une production de y équipements, le coût mensuel vaut $c(y, i) = f(y) + 6i$ avec $f(0) = 0, f(1) = 15, f(2) = 17, f(3) = 19, f(4) = 21$.

Déterminer le plan de production de coût minimal en utilisant la programmation dynamique.