

CE Théorie des graphes - L3 2011/2012 - **Eléments de correction**

1. Donnez la définition d'un graphe non-orienté (précisez les éléments qui constituent un graphe, les propriétés que respectent ces éléments, ...). Donnez un exemple d'utilisation.
 $G = (S, A)$
 S est un ensemble d'éléments dits « sommets ».
 A est un ensemble de couples (x,y) de sommets appelés « arêtes ». Chaque arête représente la mise en relation symétrique des deux sommets qui la composent.
Exemple :
 Dans une ville où les sens interdits n'existeraient pas, on pourrait représenter les voies de circulation par un graphe : les intersections seraient modélisées par les sommets du graphe, tandis que les voies de circulation (à double sens, donc, puisqu'il n'y a pas de sens interdit !) entre deux intersections seraient représentées par des arêtes.
2. Dans quels cas dit-on que deux arêtes d'un graphe non-orienté sont adjacentes ?
 Lorsqu'elles ont au moins une extrémité commune.
3. Donnez la définition d'une boucle.
 Il s'agit d'un arc (graphe orienté), ou d'une arête (graphe non orienté), (x,y) telle que $x=y$.
4. Donnez la définition d'un sous-graphe et celle d'un graphe partiel.
 Soit $G = (S, A)$ un graphe.
 Graphe partiel engendré par A_1 :
 $G_1 = (S, A_1)$; $A_1 \subseteq A$
 Sous-graphe engendré par S_2 :
 $G_2 = (S_2, A_2)$; $S_2 \subseteq S$; $A_2 = \{ a \in A, a=(x,y), x \in S_2 \text{ et } y \in S_2 \}$
5. En supposant qu'il existe au moins deux chemins d'un sommet x à un sommet y , dans quel cas est-ce qu'il n'y a pas de chemin le plus court ? Expliquez pourquoi.
 Dans le cas où il existe un chemin de x à y incluant un circuit de valeur négative.
 En effet, quelle que soit cette valeur négative, il suffirait de considérer un chemin similaire dans lequel le circuit est « parcouru » une fois de plus pour trouver un chemin encore plus court. Il n'existe donc pas de chemin le plus court !
6. Que recherche-t-on avec l'algorithme de Bellman ? Dans quel cas l'utilise-t-on, plutôt que celui de Dijkstra ?
 L'algorithme de Bellman permet de trouver les chemins les plus courts d'un sommet de départ donné vers tous les autres sommets du graphe.
 Il fonctionne également en présence d'arc à valeur négative, ce que l'algorithme de Dijkstra n'accepte pas.
7. Donnez la définition d'un rang d'un sommet.
 1.
 Le rang d'un sommet est une valeur numérique correspondant au plus « long » chemin allant d'un point d'entrée du graphe à ce sommet.
 La notion de « longueur » est ici le nombre d'arcs composant un chemin.
 2.
 On peut également donner une définition plus mathématique : le rang est une fonction définie de l'ensemble des sommets vers l'ensemble des valeurs entières positives ou nulles respectant les propriétés suivantes :
 Soit $G=(S,A)$ un graphe.
 (1) $\forall x \in S, \Gamma^{-1}(x)=\emptyset \Rightarrow \text{rang}(x)=0$ (*)
 (2) $\forall x \in S, \Gamma^{-1}(x) \neq \emptyset \Rightarrow (\forall y \in \Gamma^{-1}(x), \text{rang}(x) > \text{rang}(y))$

(*) On peut aussi choisir une valeur quelconque pour chaque point d'entrée du graphe, et ensuite appliquer la propriété (2)..

Bien entendu, aucune de ces définitions ne s'applique sur un graphe ayant au moins un circuit...

8. Pour un graphe G donné ci-dessous,

a. Calculez Γ^1 pour tous ses sommets

<i>Sommet</i>	<i>Ensemble des sommets atteints par un chemin de 1 arc</i>
1	2, 3
2	6
3	4
4	2, 6
5	2
6	5

b. Calculez Γ et Γ^{-1} pour tous ses sommets

Ensemble des successeurs directs et prédécesseurs directs.

<i>Sommet</i>	<i>Ensemble des prédécesseurs directs</i>
1	aucun
2	1, 4, 5
3	1
4	3
5	6
6	2, 4

Les ensembles des successeurs directs sont donnés à la question 8a...

c. Calculez les degrés $d^{\circ+}$ et $d^{\circ-}$ pour tous ses sommets

Nombres d'ars incidents vers l'extérieur et nombres d'arcs incidents vers l'intérieur.

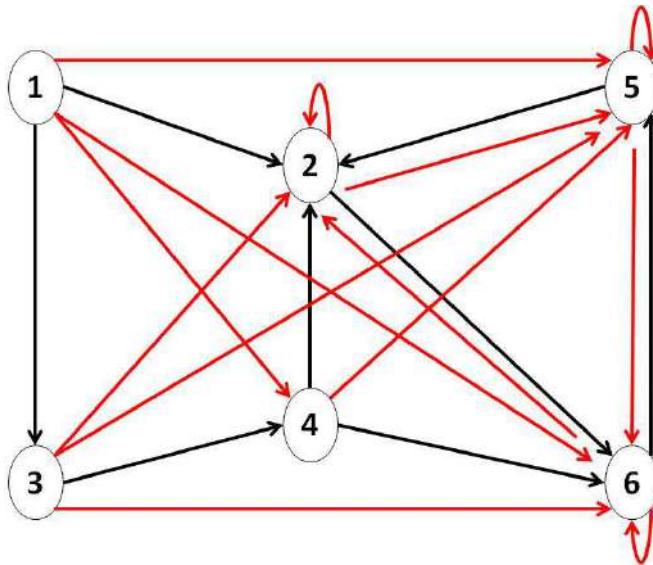
<i>Sommet</i>	$d^{\circ+}$	$d^{\circ-}$
1	2	0
2	1	3
3	1	1
4	2	1
5	1	1
6	1	2

d. Donnez sa matrice d'adjacence (incidence sommets-sommets)

Matrice carrée 6x6 de « vrai » (ou « 1 ») et « faux » (ou « 0 »).

	1	2	3	4	5	6	
1	F	V	V	F	F	F	'F' = « faux »
2	F	F	F	F	F	V	'V' = « vrai »
3	F	F	F	V	F	F	
4	F	V	F	F	F	V	
5	F	V	F	F	F	F	
6	F	F	F	F	V	F	

e. Dessinez sa fermeture transitive



Le graphe ci-dessus correspond à la fermeture transitive. Les arcs en rouge sont ceux qui n'appartiennent pas au graphe initial.

f. Est-ce que G contient un circuit ? Expliquez la méthode utilisée pour trouver la réponse.

La réponse est bien évidemment « oui ».

Méthode 1 : il y a au moins une boucle (un « vrai » en 1^{ère} diagonale de la matrice d'adjacence) dans le graphe correspondant à la fermeture transitive.

Méthode 2 : Tant qu'il y a un point d'entrée dans le graphe, on le supprime. On s'arrête par absence de point d'entrée, ce qui montre la présence d'un circuit.

G :

