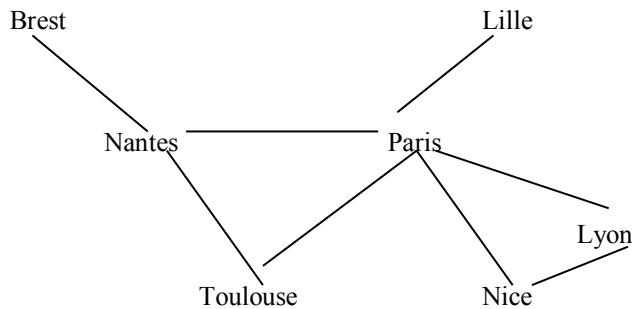


CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Beaucoup de problèmes de la vie courante, tels la gestion de réseaux de communication ou l'ordonnancement de tâches, correspondent à des structures relationnelles que l'on peut modéliser par des graphes. Informellement un graphe est un ensemble d'objets, appelés *sommets* et de *relations* entre ces sommets.

Exemples

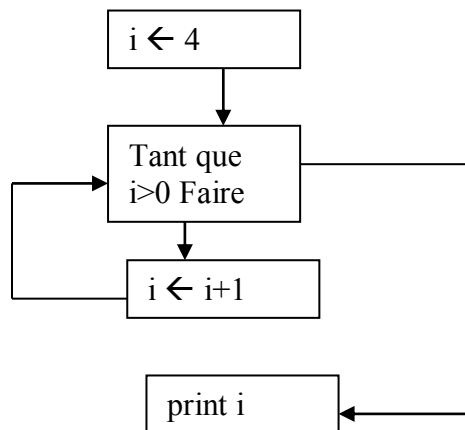
1. Dans une carte des liaisons aériennes, les villes sont des sommets du graphe et l'existence d'une liaison aérienne entre deux villes est la relation du graphe.



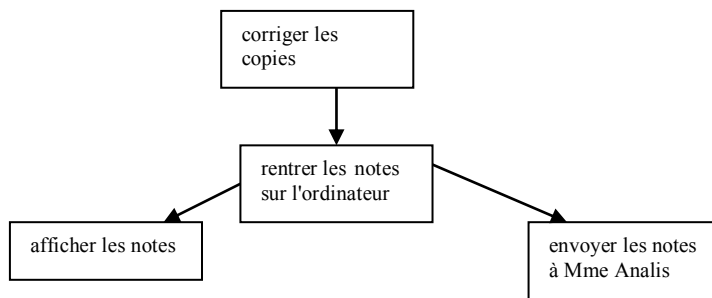
Dans cet exemple, la relation est symétrique : on peut supposer que la compagnie aérienne assure des vols aller-retour. Dans ce cas on dit que le graphe est *non-orienté*. Si deux sommets s_1 et s_2 sont en relation, on dit qu'il existe une arête entre s_1 et s_2 . On peut se poser des questions suivantes : existe-t-il un moyen d'aller d'une ville A à une ville B ? Quel est le trajet qui nécessite le moins d'escales ? etc.

2. Dans le graphe du flot de contrôle d'un programme, les boîtes (instructions ou tests) sont les sommets, et les flèches indiquent les enchaînements possibles entre celles-ci.

Dans cet exemple, la relation n'est pas symétrique : $I := I+1$ s'exécute immédiatement avant $S := S + A[I]$, mais pas l'inverse. Dans ce cas, on dit qu'on a un graphe *orienté*. Si deux sommets s_1 et s_2 sont en relation, on dit qu'on a un arc de s_1 vers s_2 .

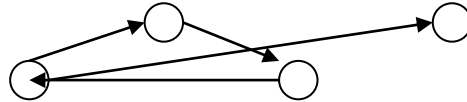


3. Dans une organisation du travail où certaines tâches doivent être exécutées avant d'autres, on peut schématiser l'ordonnancement des tâches par un graphe où les sommets sont les tâches et où il existe un arc entre deux tâches t_i et t_j seulement si t_i doit être terminée juste avant d'exécuter t_j . Un des traitements intéressants sur un tel graphe est un tri topologique qui consiste à trouver un ordre des tâches tel que toute tâche t_i soit exécutée avant toute tâche t_j s'il existe un arc de t_i à t_j .

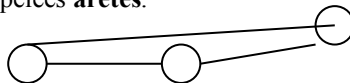


Définitions :

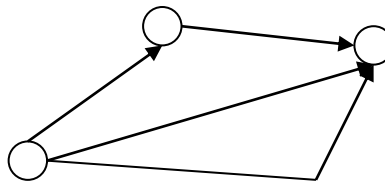
- Un **graphe orienté** G est un couple $\langle S, A \rangle$, où S est un ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires ordonnées de sommets appelées **arcs**.



- Un **graphe non orienté** G est un couple $\langle S, A \rangle$, où S est ensemble fini de sommets et où A est un ensemble fini de paires de sommets, appelées **arêtes**.



- Un **p -graphe** est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de p arcs entre deux sommets quelconques i et j pris dans cet ordre.

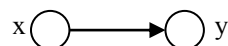


2-graphe

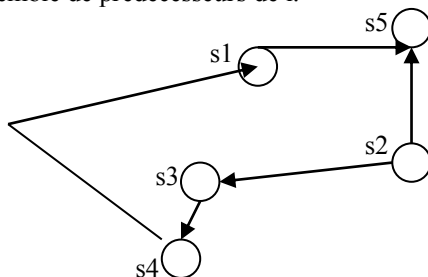
Chap. 2 Généralités sur les graphes Terminologie

Nous définissons ici le vocabulaire et les notations usuels sur les graphes.

- On note $x \rightarrow y$ l'arc (x, y) ; x est l'**extrémité initiale** de l'arc, y est son **extrémité terminale**. On dit que y est un **successeur** de x et que x est un **prédécesseur** de y .
De même, on note $x - y$ l'arête $\{x, y\}$; x et y sont les deux **extrémités** de l'arête.

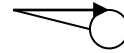


- L'application **multivoque** $\Gamma(i) = \{j \in S \mid (i, j) \in A\}$ à tout élément $i \in S$ fait correspondre une partie de S : l'ensemble de successeurs de i .
- L'application **multivoque réciproque** $\Gamma^{-1}(i) = \{j \in S \mid (j, i) \in A\}$ à tout élément $i \in S$ fait correspondre une partie de S : l'ensemble de prédécesseurs de i .

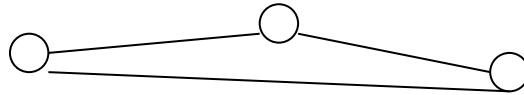


$$\begin{aligned} \Gamma(s1) &= \{s5\} ; \Gamma(s2) = \{s3, s5\} ; \Gamma(s3) = \{s4\} ; \Gamma(s4) = \{s1\} ; \Gamma(s5) = \{\} \\ \Gamma^{-1}(s1) &= \{s4\} ; \Gamma^{-1}(s2) = \{\} ; \Gamma^{-1}(s3) = \{s2\} ; \Gamma^{-1}(s4) = \{s3\} ; \Gamma^{-1}(s5) = \{s1, s2\} \end{aligned}$$

- Une **boucle** est un arc dont les extrémités coïncident. L'arc $a=\{x, x\}$ est une boucle.
- Un graphe non orienté est **simple** s'il est sans boucle et s'il y a au plus une arête entre deux sommets.



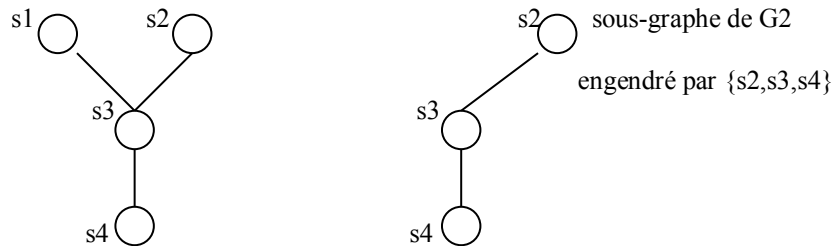
G1



- Soit $G = \langle S, A \rangle$ un graphe. Si $|S|=N$ alors le graphe G est **d'ordre N** .
 $N(G1) = 3$

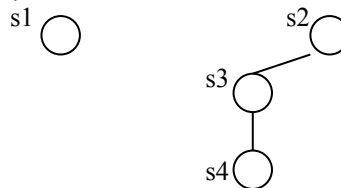
- Soit $G = \langle S, A \rangle$ un graphe. Le **sous-graphe** de G **engendré par** $S' \subseteq S$ est le graphe G' dont les sommets sont les éléments de S' et dont les arcs (resp. arêtes) sont les arcs (resp. arêtes) de G ayant leurs deux extrémités dans S' . Autrement dit, on ignore les sommets de $S - S'$ ainsi que les arcs ayant au moins une extrémité dans $S - S'$.

G2

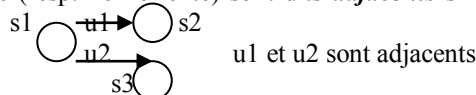


- Soit $G = \langle S, A \rangle$ un graphe. Le **graphe partiel** de G **engendré par** $A' \subseteq A$ est le graphe $\langle S, A' \rangle$ dont les sommets sont les éléments de S et dont les arcs (resp. arêtes) sont ceux de A' . Autrement dit, on élimine de G les arcs (arêtes) de $A - A'$.

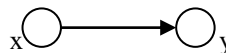
graphe partiel de G engendré par $\{s2,s3,s4\}$



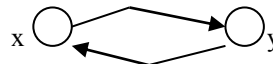
- Deux **arcs** (resp. arêtes) d'un graphe orienté (resp. non orienté) sont dits **adjacents** s'ils ont au moins une extrémité commune.



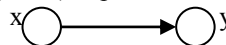
- Deux **sommets** d'un graphe non orienté sont dits **adjacents** s'il existe une arête les joignant. Dans un graphe orienté, le **sommet** y est dit **adjacent** au sommet x s'il existe un arc $x \rightarrow y$.



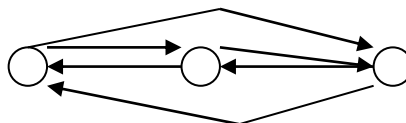
- Un graphe est **symétrique** ssi $(i,j) \in A \Leftrightarrow (j,i) \in A$ (0 ou 2 arcs entre 2 sommets distincts)



- Un graphe est **antisymétrique** ssi $(i,j) \in A \Rightarrow (j,i) \notin A$ (Au plus un arc entre 2 sommets distincts)

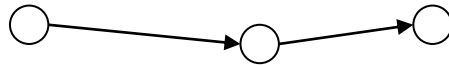


- Un graphe orienté (resp non orienté) est dit **complet** si pour tout couple de sommets (x, y) , il existe un arc $x \rightarrow y$ (resp. une arête $x-y$).

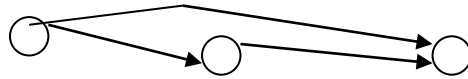


- Le graphe est **transitif** ssi $(i,j) \in A$ et $(j,k) \in A \Rightarrow (i,k) \in A, \forall i, j, k \in S$.
- Dans un graphe orienté, si un sommet x est l'extrémité initiale d'un arc $u=x \rightarrow y$, on dit que l'arc u est **incident** à x **vers l'extérieur**. Le nombre d'arcs ayant leur extrémité initiale en x , se note $d^{o+}(x)$ et s'appelle le **degré extérieur** de x .

non-transitif

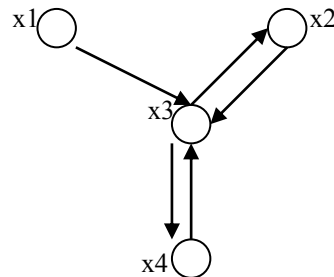


transitif

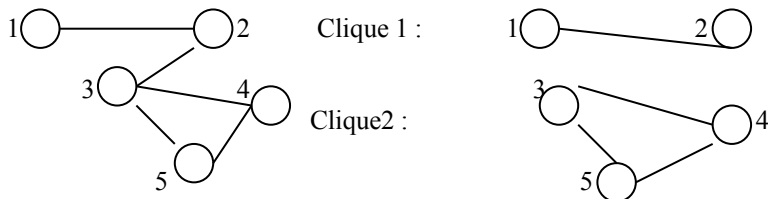


On définit de même les notions d'arc *incident vers l'intérieur* et le *demi-degré intérieur* qui est noté $d^{\circ-}(x)$.

- Dans un graphe orienté (resp. non orienté), on appelle **degré** d'un sommet x , et on note $d^{\circ}(x)$, le nombre d'arcs (resp. d'arêtes) dont x est une extrémité. Dans le cas d'un graphe orienté, on a : $d^{\circ}(x) = d^{\circ+}(x) + d^{\circ-}(x)$, pour tout sommet x . Dans l'exemple, le calcul des degrés du sommet x_3 donne : $d^{\circ+}(x_3)=2$; $d^{\circ-}(x_3)=3$; $d^{\circ}(x_3)=5$.



- On appelle **clique** d'un graphe non orienté G tout ensemble de sommets C tel que deux sommets quelconques de C sont reliés par une arête.

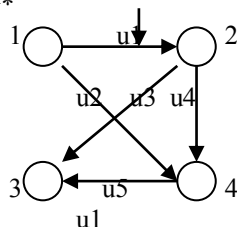


Matrices associées à un graphe

Matrice d'incidence sommets-arcs

- C'est une matrice $A = (a_{iu})$, $i = 1, \dots, N$; $u = 1, \dots, M$ à coefficients 0, +1, -1. N est le nombre de sommets et M est le nombre des arcs.
- Chaque ligne correspond à un sommet et chaque colonne à un arc.
- Si $u=(i,j) \in A$ alors $a_{iu}=+1$, $a_{ju}=-1$ et $a_{ku}=0$ pour $\forall k \neq i$ et j , $k \in S$

G^*



	u1	u2	u3	u4	u5
1	1	1	0	0	0
2	-1	0	1	1	0
3	0	0	-1	0	-1
4	0	-1	0	-1	1

Matrice d'incidence sommets-arêtes (idem sauf qu'il y a des 1 à la place des -1)

Matrice d'adjacence (incidence sommets-sommets)

On représente l'ensemble des arcs par un tableau des booléens; comme chaque arc est une paire ordonnée de sommets, le graphe est représenté par une matrice carrée de booléens, dite matrice d'adjacence., de dimension $N \times N$ si le graphe a N sommets. On a donc le type suivant :

type GRAPHE = tableau[1..N,1..N] de booléens

Dans le cas où le graphe est non orienté, la matrice est symétrique.

La représentation matricielle est pratique pour tester l'existence d'un arc (ou d'une arête) entre deux sommets : on accède directement à l'élément de la matrice (en un temps constant). Il est facile d'ajouter ou de retirer un arc (une arête) et de parcourir tous les successeurs ou prédécesseurs d'un sommet.

Pour G^*

	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	0	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	0

Utilisation de listes d'adjacence

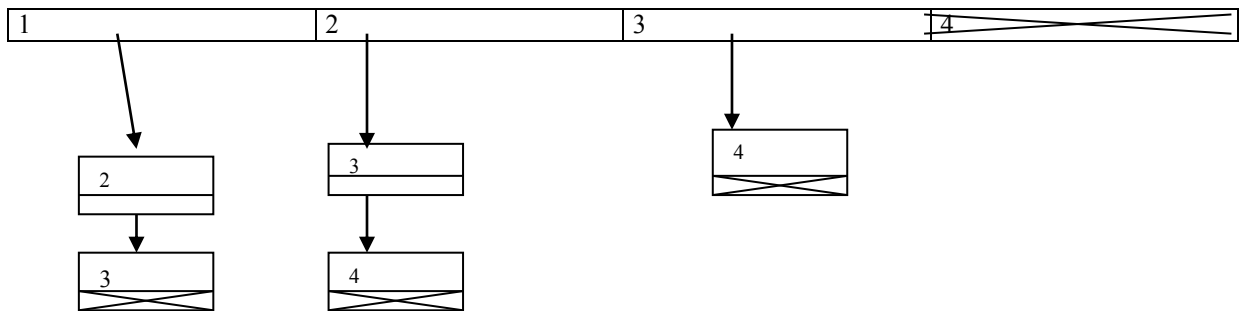
Une autre représentation classique des graphes consiste à représenter l'ensemble des sommets et à associer à chaque sommet la liste de ses successeurs rangés dans un certain ordre. Ces listes sont appelées listes d'adjacence.

Ces listes sont accessibles à partir d'un tableau S, qui contient pour chaque sommet, un pointeur vers le début de sa liste.

```
type ptr_liste = ^liste_sommets;
liste_sommets = enregistrement
```

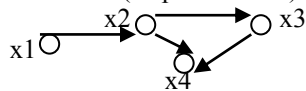
```
sommet : entier
suiv : ptr_liste
```

```
fin
```



2.4 Connexité

- Dans un graphe orienté G (resp. non orienté), on appelle **chemin** (resp. **chaîne**) de longueur L , une suite de $(L+1)$ sommets $(s_0, s_1, \dots, s_L)$ tels que : pour tout i tel que $0 \leq i \leq L-1$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$ est un arc (resp. une arête) de G . On dit qu'il y a un chemin de longueur 0 de tout sommet vers lui-même.



Ex. Chemin x_1 - x_3 de longueur 2 : $x_1 x_2 x_3$

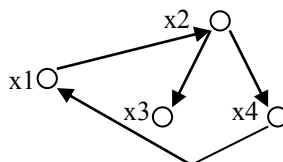
On peut aussi définir de façon récursive un chemin de longueur L ($L > 0$) allant du sommet x vers le sommet y comme:

si $L=1$, un arc de x vers y

sinon la suite composée d'un arc de x vers un certain sommet z et d'un chemin de z vers y , de longueur $L-1$.

La définition récursive d'une chaîne de longueur L est analogue

- Un chemin (resp. une chaîne) est dit **élémentaire** s'il ne contient pas plusieurs fois le même sommet.
- Un **circuit** (resp. un cycle) est un chemin (resp. une chaîne) dont les extrémités coïncident.



Fermeture transitive

1. D'une application multivoque

- On appelle **fermeture transitive** de l'application multivoque Γ , l'application Γ^+ telle que :

$$\Gamma^+ = \Gamma \cup \Gamma^2 \cup \dots \cup \Gamma^{N-1}$$

Γ^k représente l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre à partir du sommet i par des chemins ayant exactement k arcs.

- Tout chemin élémentaire a au plus $N-1$ arcs $\Rightarrow \Gamma^+ = \{\text{sommets qu'on peut atteindre à partir de } i\}$.
- Γ^+ est l'ensemble des descendants de i .
- Γ^{-1} est l'ensemble des ancêtres de i .

2. D'un graphe

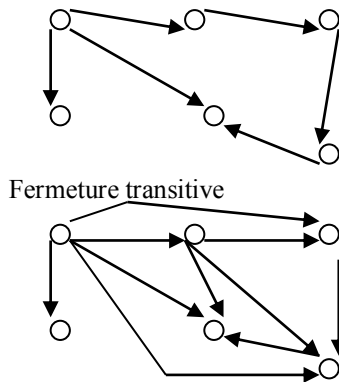
- A tout graphe $G = [S, A]$, on peut associer de façon **unique** un graphe transitif $\hat{G} = [S, \hat{A}]$, appelé **fermeture transitive**, où $\hat{A}$ est défini par la relation d'appartenance suivante :

$(i, j) \in \hat{A} \Leftrightarrow$ il existe dans G un **chemin** de i vers j .

- Si $\Gamma_p^+(i)$ est l'ensemble des sommets accessibles à partir de i par un chemin de cardinalité p alors $\hat{G}$ peut être défini par l'application multivoque Γ^+ suivante :

$$\Gamma^+ = \Gamma_1^+(i) \cup \Gamma_2^+(i) \cup \dots \cup \Gamma_{N-1}^+(i), i \in S.$$

- Γ^+ représente l'ensemble des **descendants** de i .
- Γ^- représente l'ensemble des **ancêtres** ou **ascendants** de i .

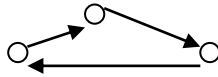


Γ -équivalence : Deux graphes G et G' sont dits Γ -équivalents s'ils ont la même fermeture transitive.

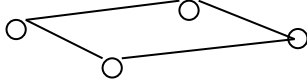
Γ -minimilité : $G = [S, A]$ est Γ -minimal si, quel que soit $u \in A$, et $G' = [S, A - \{u\}]$, alors $\Gamma(G) \neq \Gamma(G')$; i.e. que si l'on supprime un arc quelconque de G , le graphe partiel obtenu n'a plus la même fermeture transitive que G .

Connexité

- Un graphe orienté est dit **fortement connexe** si pour toute paire ordonnée de sommets distincts (u, v) , il existe un chemin de u vers v et un chemin de v vers u .

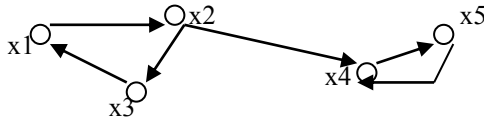


- Un graphe non orienté est dit **connexe** si pour toute paire de sommets distincts (u, v) , il existe une chaîne reliant u et v .



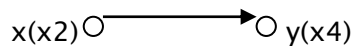
- On appelle **composante fortement connexe** d'un graphe orienté un sous-graphe **fortement connexe** maximal, c.a.d. un sous-graphe fortement connexe qui n'est pas strictement contenu dans un autre sous-graphe fortement connexe. On appelle **composante connexe** d'un graphe non orienté un sous-graphe connexe maximal.

G:



Le graphe G contient 2 composantes fortement connexes : $x_1x_2x_3$ et x_4x_5

Graphe réduit : On appelle graphe réduit du graphe $G = [S, A]$ le graphe $\hat{G} = [\hat{S}, \hat{A}]$ dont l'ensemble $\hat{S}$ des sommets est en bijection avec l'ensemble des composantes fortement connexes et $(x, \hat{y}) \in \hat{A}$ si et seulement si il existe un arc u dont l'extrémité initiale appartient à la composante fortement connexe correspondant à x et l'extrémité terminale appartient à la composante fortement connexe correspondant à $\hat{y}$.



2.5 Graphes sans circuits

L'absence de circuits est indispensable à l'utilisation d'un grand nombre d'algorithmes. Il est donc important de disposer de méthodes pour tester l'absence de circuits dans un graphe donné.

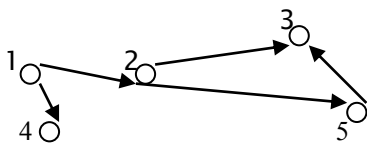
Méthode 1

Un graphe est sans circuit si la matrice d'adjacence M associée à sa fermeture transitive ne possède aucun 1 sur la diagonale.

Méthode 2

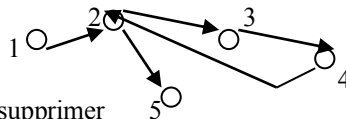
L'algorithme : Tant que c'est possible, supprimer du graphe un sommet sans prédécesseur. Si on réussit à supprimer tous les sommets, le graphe est sans circuit.

Un graphe sans circuit



On supprime : 1, 4, 2, 5, 3

Un graphe avec circuit



On supprime 1, et on ne peut plus rien supprimer