

### **Fin chap. 3 :Le problème central de l'ordonnement (les plus longs chemins)**

Beaucoup de réalisations techniques ont un objectif à atteindre qui suppose l'exécution de multiples tâches  $t_i$ , soumises à des contraintes de successions : la tâche  $t_i$  de durée  $d_i$  doit être achevée pour que la tâche  $t_j$  commence. C'est un exemple de problème d'ordonnement.

On représente un tel projet par un graphe orienté dont les sommets représentent les tâches (graphe potentiel-tâches de B. Roy, 1960)

On définit un arc de coût  $d_i$  entre  $t_i$  et  $t_j$ , si la tâche  $t_i$  doit immédiatement précéder la tâche  $t_j$  et qu'elle dure  $d_i$ .

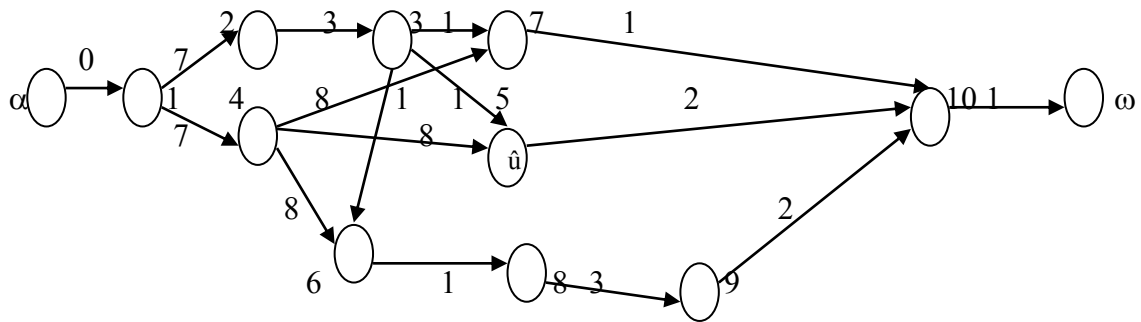
Ce graphe est sans circuit et admet des sommets sans prédécesseur et des sommets sans successeur.

On ajoute au graphe deux sommets  $\alpha$  et  $\omega$  correspondant à des tâches fictives telles que  $\alpha$  est la tâche de début de projet, de durée nulle, qui doit être antérieure à toutes les autres tâches (on relie  $\alpha$  aux sommets sans prédécesseur par des arcs de coût nul) et  $\omega$  est la tâche de fin de projet (on relie les sommets sans successeur à  $\omega$  par des arcs de coût nul).

Le projet commence à la date 0 et on cherche une exécution des tâches qui minimise la durée totale du projet.

#### **Exemple (construction de la maison)**

| Code tâche | Libellé                  | Durée (semaine) | Prédécesseurs |
|------------|--------------------------|-----------------|---------------|
| 1          | Maçonnerie               | 7               | aucun         |
| 2          | Charpente de la toiture  | 3               | 1             |
| 3          | Toiture                  | 1               | 2             |
| 4          | Plomberie et électricité | 8               | 1             |
| 5          | Façade                   | 2               | 3,4           |
| 6          | Fenêtre                  | 1               | 3,4           |
| 7          | Aménagement du jardin    | 1               | 3,4           |
| 8          | Plafonds                 | 3               | 6             |
| 9          | Peintures                | 2               | 8             |
| 10         | Emménagement             | 1               | 5,7,9         |



## Principe

- Pour qu'une tâche puisse commencer, il est nécessaire que toutes les tâches qui la relient à  $\alpha$  soient réalisées ; on note  $\tau_i$  la date au plus tôt à laquelle la tâche  $t_i$  peut être commencée.
- La durée du projet ne peut être inférieure à la somme des durées des tâches composant le chemin le plus long de  $\alpha$  à  $\omega$  : chemin critique.
- Il est possible de retarder l'exécution de certaines tâches sans modifier la durée du projet ; on note  $T_i$  la date au plus tard à laquelle la tâche  $t_i$  peut être commencée.

## Algorithmes

### 1. Dates au plus tôt

- Poser  $\tau_\alpha = 0$
- Prendre les sommets  $j$  par ordre de rang **croissant** et faire :

$$\tau_j = \max_{i \in \Gamma^{-1}(j)} (\tau_i + d_i)$$

### 2. Dates au plus tard

- Poser  $T_\omega = \tau_\omega$
- Prendre les sommets  $j$  par ordre de rang **décroissant** et faire :

$$T_j = \min_{i \in \Gamma(j)} (T_i) - d_j$$

- A chaque sommet  $i$  on peut associer un intervalle de flottement :  $m_i = T_i - \tau_i$
- Les tâches dont  $m_i = 0$  sont appelées tâches critiques