

Théorie des Graphes

1

INTRODUCTION

Sommaire

1	INTRODUCTION.....	1
1.1	Graphe – Premières définitions	2
1.1.1	Graphe, sommets, arcs.....	2
1.1.2	Graphe orienté / non orienté – Arcs / arêtes	2
1.1.3	Graphe valué / non valué.....	2
1.1.4	Extrémités / prédécesseurs / successeurs	2
1.1.5	Chaîne / Chemin / Circuit / Cycle.....	3
1.1.6	Boucle	3
1.2	Quelques exemples	4

1.1 Graphe – Premières définitions

1.1.1 Graphe, sommets, arcs

Graphe = représentation de relations entre « objets ».

Exemple classique : dans plan d'un réseau de transport (métro par exemple), on met en relation des stations en fonction des liaisons qui les relient.

La représentation des stations du réseau se fait au moyen de « sommets » du graphe ; les liaisons entre les stations sont représentées par des « arc ».

G est donc la représentation d'une fonction de S vers S (S dénote l'ensemble des sommets) : l'ensemble A (ensemble des relations) est inclus dans $S \times S$.

On note $G = (S, A)$.

Nous considérerons que l'ensemble S est fini, de même que l'ensemble A.

1.1.2 Graphe orienté / non orienté – Arcs / arêtes

Graphe orienté :

La relation $S \times S$ est orientée : (x,y) n'est pas équivalent à (y,x) .

On parle alors d'arcs définis de S vers S :

Graphe orienté $G = \text{couple } (S,A)$

$S = \{ \text{Sommets} \}$

$A = \{ \text{Arcs} \}$

Graphe non orienté :

La relation $S \times S$ est non orientée, (x,y) et (y,x) représentent la même chose.

On parle alors d'arête définies de S vers S :

Graphe orienté $G = \text{couple } (S,A)$

$S = \{ \text{Sommets} \}$

$A = \{ \text{Arêtes} \}$

1.1.3 Graphe valué / non valué

Pour résoudre certains problèmes, il est nécessaire d'associer une valeur à chaque relation entre deux sommets.

Dans l'exemple du réseau de transport, on peut par exemple associer le temps de déplacement entre deux stations et ainsi calculer par cumul le temps total de parcours pour aller d'un point à un autre en passant par les liaisons existantes.

Graphe valué $G = (S,A)$

$S = \{ \text{sommets} \}$

$A = \{ \text{arcs ou arêtes avec valeurs} \}$

A est défini ici comme une fonction de S vers l'ensemble $S \times V$, où V est le domaine de définition des valeurs associées aux arcs ou arêtes.

Un élément de A est donc représenté sous la forme d'un triplet : les deux sommets et la valeur associée.

1.1.4 Extrémités / prédécesseurs / successeurs

Soit un arc dont les extrémités sont x et y, deux éléments de S. Notons (x,y) , ou $x \rightarrow y$ cet arc :

x est l'extrémité initiale

y est l'extrémité terminale

y est dit être un successeur de x ; x est dit être un prédécesseur de y.

Un sommet peut avoir plusieurs successeurs et/ou plusieurs prédécesseurs.

Soit Γ la relation « successeur », et donc Γ^{-1} la relation « prédécesseur ».

Pour tout élément x de S , on a :

$$\Gamma(x) = \{ y \in S \mid (x, y) \in A \}$$

$$\Gamma^{-1}(x) = \{ y \in S \mid (y, x) \in A \}$$

1.1.5 Chaîne / Chemin / Circuit / Cycle

Graphe orienté :

2 définitions d'un chemin :

chemin de longueur N = suite de $N+1$ sommets $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N)$ telle que

pour tout sommet s_i de la suite, $0 \leq i \leq N-1$, $s_i \rightarrow s_{i+1}$ est un arc A

chemin de longueur N = suite de N arcs $(a_1, a_2, \dots, a_N)$ telle que

pour tout arc a_i , $1 \leq i \leq N$, l'extrémité terminale de a_i est l'extrémité initiale de a_{i+1}

circuit = chemin $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_N)$, les ' s_i ' étant des sommets, tel que $s_0 = s_N$

circuit = chemin $(a_1, a_2, \dots, a_N)$, les ' a_i ' étant des arcs ou arêtes, tel que l'extrémité terminale de a_N est l'extrémité initiale de a_1 .

Graphe non orienté :

chaîne de longueur N : définitions similaires en parlant d'arêtes.

Dans un graphe non valué, la longueur d'un chemin est le nombre d'arcs ou arêtes qui le composent.

1.1.6 Boucle

Boucle sur un sommet x : (x, x) est un élément de A

1.2 Quelques exemples

Organigramme de programmation

Arbre généalogique

Réseaux sémantiques

Plan de métro et recherche de chemin

Réseau de communication

Coloriage d'une carte

Flot