

Théorie des Graphes

3

CONCEPTS GENERAUX

Sommaire

3	CONCEPTS GENERAUX.....	1
3.1	Définitions générales	2
3.1.1	Sommets adjacents	2
3.1.2	Arcs adjacents	2
3.1.3	Arc Incident / incident vers l'intérieur / incitent vers l'extérieur -- Degré / demi-degré intérieur / demi-degré extérieur	2
3.1.4	Sous-graphe engendré par S'.....	2
3.1.5	Graphe partiel engendré par A'	2
3.1.6	p-graphe.....	3
3.1.7	Graphe simple.....	3
3.1.8	Graphe complet	3
3.1.9	Graphe d'ordre N	3
3.1.10	Graphe transitif	3
3.1.11	Graphe symétrique / Graphe anti-symétrique	3
3.1.12	Clique	3
3.1.13	Chemin simple	3
3.1.14	Chemin / Chaîne) élémentaire	4
3.1.15	Chemin hamiltonien	4
3.1.16	Chemin eulérien.....	4
3.1.17	Connexité.....	4
3.1.18	Composante [fortement] connexe.....	4

3.1 Définitions générales

Soit :

$G=(S,A)$ un graphe

x, y, z des sommets.

a, a_1, a_2 des arcs ou arêtes (selon les cas)

3.1.1 Sommets adjacents

Graphe non orienté :

x et y sont adjacents si (x,y) est dans A

Graphe orienté :

y est adjacent à x si (x,y) est dans A

3.1.2 Arcs adjacents

a_1 et a_2 sont adjacents si a_1 et a_2 ont au moins une extrémité commune

Définition similaire pour arcs et arêtes.

3.1.3 Arc Incident / incident vers l'intérieur / incitent vers l'extérieur -- Degré / demi-degré intérieur / demi-degré extérieur

$a = x \rightarrow y$

graphe orienté

Incidence :

a est incident à x vers l'extérieur

a est incident à y vers l'intérieur

Demi-degrés :

Demi-degré extérieur d'un sommet x :

$d^+(x)$ = nombre d'arcs incident à x vers l'extérie ur

Demi-degré intérieur d'un sommet x :

$d^-(x)$ = nombre d'arcs incidents à x vers l'intéri eur

Degré d'un sommet x :

$d^0(x)$ = nombre d'arcs dont x est une extrémité

$d^0(x) = d^+(x) + d^-(x)$

Cas des graphes non orientés :

Degré d'un sommet $x = d^0(x)$ = nombre d'arêtes dont x est une extrémité

3.1.4 Sous-graphe engendré par S'

S' un sous-ensemble de S

Le sous-graphe de G engendré par S' est le graphe $G'=(S',A')$ où A' contient les éléments (arcs ou arêtes) de A dont les deux extrémités appartiennent à S' .

3.1.5 Graphe partiel engendré par A'

A' un sous-ensemble de A

Le graphe partiel de G engendré par A' est le graphe $G'=(S,A')$.

3.1.6 *p-graphe*

Un *p-graphe* est un graphe dans lequel il n'existe jamais plus de p arcs entre deux sommets quelconques x et y pris dans cet ordre.

3.1.7 *Graphe simple*

G non orienté

G est simple s'il est sans boucle et s'il y a au plus une arête entre deux sommets.

3.1.8 *Graphe complet*

G orienté

G est complet si pour tout couple (x,y) de sommets, il existe un arc $x \rightarrow y$.

G non orienté

Idem avec « arête $x-y$ »

3.1.9 *Graphe d'ordre N*

$N = |S|$.

3.1.10 *Graphe transitif*

G est transitif si et seulement si :

si (x,y) et (y,z) sont deux éléments de A , alors (x,z) est aussi un élément de A

3.1.11 *Graphe symétrique / Graphe anti-symétrique*

Graphe symétrique :

si (x,y) est dans A , alors (y,x) est aussi dans A
(et réciproquement, puisque x et y sont quelconques !...)

Graphe antisymétrique :

si (x,y) est dans A , alors (y,x) n'est pas dans A

3.1.12 *Clique*

G non orienté

Clique de G = un sous-ensemble C de S tel que
pour tout couple x,y de sommets de C , l'arête (x,y) appartient à A .

3.1.13 *Chemin simple*

Il ne comporte pas plusieurs fois le même arc

3.1.14 Chemin / Chaîne) élémentaire

Un chemin (resp. une chaîne) qui ne contient pas plusieurs fois le même sommet.

3.1.15 Chemin hamiltonien

Un chemin élémentaire qui passe par chacun des sommets du graphe

3.1.16 Chemin eulérien

Un chemin simple qui contient tous les arcs du graphe

3.1.17 Connexité

G fortement connexe :

G est orienté

pour tous sommets x et y distincts, il existe un chemin allant de x à y ainsi qu'un chemin allant de y à x

G est connexe :

G non orienté

pour tous sommets x et y distincts, il existe une chaîne reliant x et y

3.1.18 Composante [fortement] connexe

$G' = (S', A')$ un sous-graphe de G :

G' est une composante fortement connexe de G :

G (et donc G') orienté

G' est fortement connexe et n'est strictement inclus dans aucune autre composante fortement connexe de G.

(G' est un sous-graphe fortement connexe maximal de G)

G' est une composante connexe de G :

G (et donc G') non orienté

G' est un sous-graphe connexe maximal