

16,3

Documents, ordinateurs, calculatrices, smartphones, ... etc : INTERDITS

IMPERATIF : Réponses sur les feuilles de l'énoncé.

Q2-GCM

Pour chacun des 10 sujets ci-dessous, indiquez d'une croix la (ou les) affirmation(s) qui vous semble(nt) correcte(s).

1.1. Rang d'un sommet dans un graphe orienté et valué

☒	Le rang d'un sommet x doit être inférieur aux rangs de ses successeurs
☐	Le rang d'un sommet x doit être inférieur ou égal aux rangs de ses successeurs
☐	Il ne peut pas y avoir de chemin d'au moins 2 arcs reliant deux sommets x et y de même rang
☐	Un point d'entrée peut avoir un rang quelconque

1.2. Degrés et demi-degrés dans un graphe orienté

☒	Le degré d'un sommet x est égal au nombre de sommets qui sont des prédécesseurs ou des successeurs de x
☐	Le demi-degré « négatif », ou « intérieur » d'un sommet x , noté $d^-(x)$ est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale <i>finale</i>
☒	Le degré d'un sommet est toujours strictement supérieur à chacun de ses demi-degrés
☐	Aucune des affirmations précédentes n'est correcte

1.3. Chemin / Circuit

☒	Soit $G=(S,A)$ un graphe orienté, la propriété $\forall 1 \leq i < n, s_i \in S, (s_i, s_{i+1}) \in A, s_n = s_1$ est la définition d'un circuit dans G .
☐	Soit $G=(S,A)$ un graphe orienté, la propriété $\forall 1 \leq i < n, s_i \in S, (s_i, s_{i+1}) \in A, s_n = s_1$ est la définition d'un chemin dans G .
☐	Soit $s \in S$ et $(s,s) \in A$. On ne peut pas savoir s'il existe un circuit contenant le sommet s .
☐	Les notions de chemin et de circuit sont indépendantes.

1.4. Matrices d'adjacence / d'incidence

☐	Soit $G=(S,A)$ un graphe orienté. La matrice d'adjacence (sommet $\times$ sommet) de G contient des « faux » dans ses diagonales.
☒	Dans la matrice d'incidence (sommet $\times$ arc) d'un graphe orienté sans circuit, si chaque colonne est associée à un arc, alors la somme des valeurs contenues dans la colonne est égale à 0.
☒	Dans le cas d'un graphe non orienté, la matrice d'adjacence est symétrique par rapport à sa première diagonale.
☒	La matrice d'incidence permet de calculer les demi-degrés d'un graphe orienté sans boucle, alors que la matrice d'adjacence ne permet pas toujours de calculer cette valeur.

1.5. Chemins de plus courte valeur

☐	L'algorithme de Dijkstra permet de calculer les chemins les plus courts d'un sommet vers tous les autres, quelque soit le graphe.
☐	L'algorithme de Bellman ne fonctionne pas correctement s'il y a des circuits à valeur nulle.
☒	L'algorithme de Floyd permet de détecter la présence de circuits absorbants.
☐	Pour un graphe contenant N sommets, l'algorithme de Floyd s'exécute en $N-1$ itérations.

2

NOM: WAKIM

1.6. Ordonnancement

1.6. Ordonnancement

Le calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard peut se faire à l'aide des algorithmes de Dijkstra ou Bellman.

Le calcul des calendriers au plus tôt et au plus tard peut se faire à l'aide des algorithmes de Dijkstra ou Bellman.

La date au plus tard d'un sommet est toujours strictement supérieure à sa date au plus tôt.

La date au plus tôt d'un sommet dépend de celle de ses prédécesseurs.

Aucune des affirmations précédente n'est correcte.

1.7. Définitions

Un cycle est une chaîne de N arêtes reliant N sommets.

Un chemin est une suite ordonnée de N sommets reliés deux à deux par $N-1$ arcs.

Un chemin est formé par au moins deux sommets distincts.

Dans un graphe de N sommet contenant au moins un cycle, il existe un cycle ayant au plus N arcs.

1.8. Arbres

✗ Un arbre est un graphe acyclique. (et connexe)

Un arbre couvrant d'un graphe G contient toutes les arêtes de G .

Il peut y avoir plusieurs chaînes reliant deux sommets différents d'un arbre.

La connexité d'un arbre est intéressante pour la recherche d'un arbre couvrant, mas n'est pas une propriété nécessaire pour qu'un graphe soit un arbre.

1.9. Arbres couvrants de poids minimum

Le poids d'un graphe est le nombre d'arêtes qu'il contient.

Il peut y avoir plusieurs arbres couvrants de poids minimum définis à partir d'un graphe donné.

La recherche d'un arbre couvrant est impossible sur un graphe contenant au moins un cycle.

Un arbre couvrant de poids minimum ne peut être défini qu'à partir d'un graphe connexe.

1.10. Divers

La fermeture transitive d'un graphe G permet de calculer l'existence de chemins de tout sommet à tout autre sommet dans G .

Un graphe non orienté connexe ne contient qu'une et une seule clique.

Le calcul du rang d'un sommet dans un graphe orienté fortement connexe est possible s'il n'y a pas de boucles.

Un point d'entrée n'ayant pas de successeur est un point isolé.

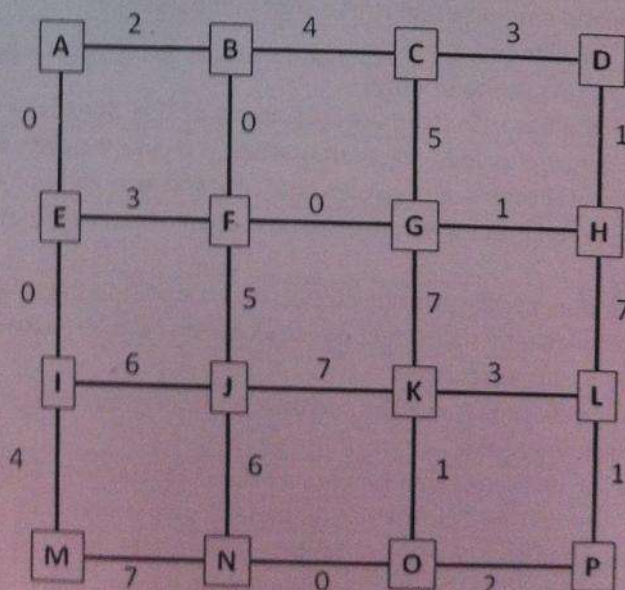
2

Q2- Arbre couvrant de poids minimum – Algorithme de PRIM

Calculez un arbre couvrant de poids minimum à partir du graphe suivant :

Vous devez utiliser l'algorithme de PRIM, en partant du sommet G.

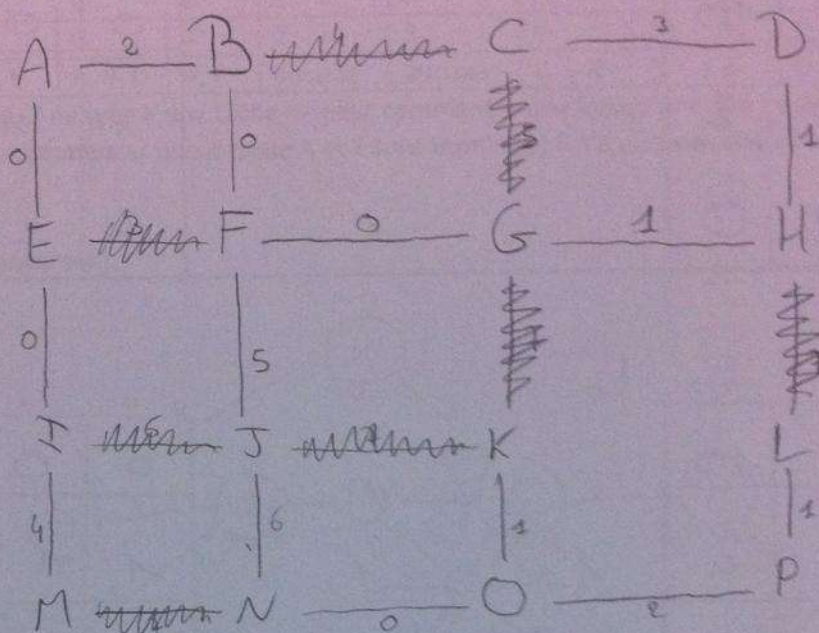
Vous indiquerez l'arbre couvrant, l'ordre dans lequel les arêtes sont ajoutées à l'arbre, ainsi que le poids de l'arbre couvrant.



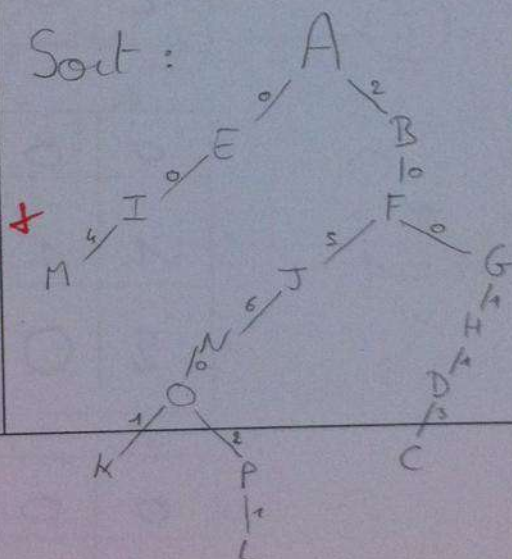
Ordre de prise en compte
des arêtes :

- 1 BF ?
- 2 FG
- 3 GH
- 4 HD
- 5 BA
- 6 AE
- 7 EI
- 8 DC
- 9 IM
- 10 FJ
- 11 JN
- 12 NO
- 13 OP
- 14 OK
- 15 OL

Arbre couvrant :



Soit :



On stop à $n-1$ arêtes
avec n le nombre de
sommets.

Poids de l'arbre :

$$P = \sum (\text{valeur arêtes})$$

$$= 2 + 5 + 6 + 1 + 2 + 1$$

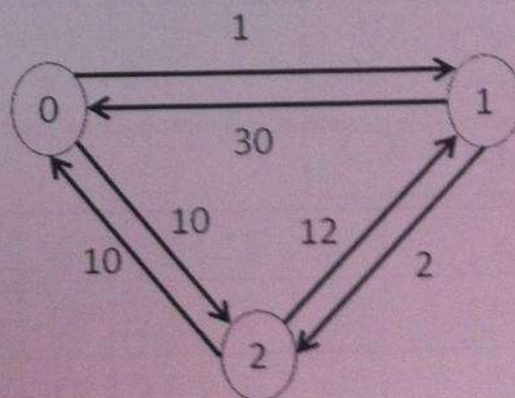
$$+ 1 + 1 + 3 + 4$$

$$= 26$$

Q3- PCC

Utilisez l'algorithme de Floyd pour recherche les chemins les plus courts de tout sommet à tout autre sommet, sur le graphe ci-contre :

Pour chaque étape de la recherche, vous indiquerez les valeurs temporaires des chemins les plus courts (matrice 'L'), ainsi que les prédécesseurs des sommets dans ces chemins (matrice 'P').



$$L$$

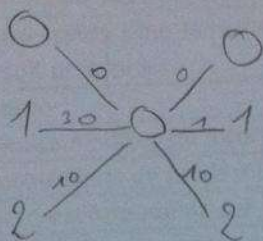
	0	1	2
0	0	1	10
1	30	0	2
2	10	12	0

$$P$$

	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	2	2

$$L_0$$

	0	1	2
0	0	1	10
1	30	0	2
2	10	11	0

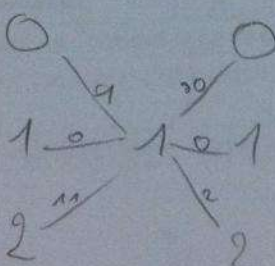


$$P_0$$

	0	1	2
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	0	2

$$L_1$$

	0	1	2
0	0	1	3
1	30	0	2
2	10	11	0

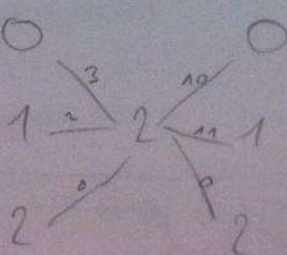


$$P_1$$

	0	1	2
0	0	0	1
1	1	1	1
2	2	0	2

$$L_2$$

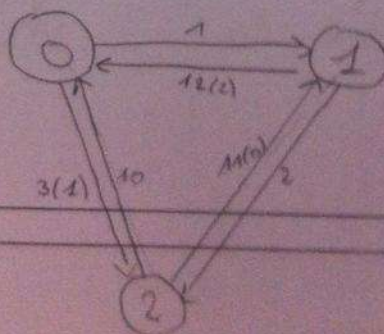
	0	1	2
0	0	1	3
1	12	0	2
2	10	11	0



$$P_2$$

	0	1	2
0	0	0	1
1	2	1	1
2	2	0	2

$\Rightarrow$



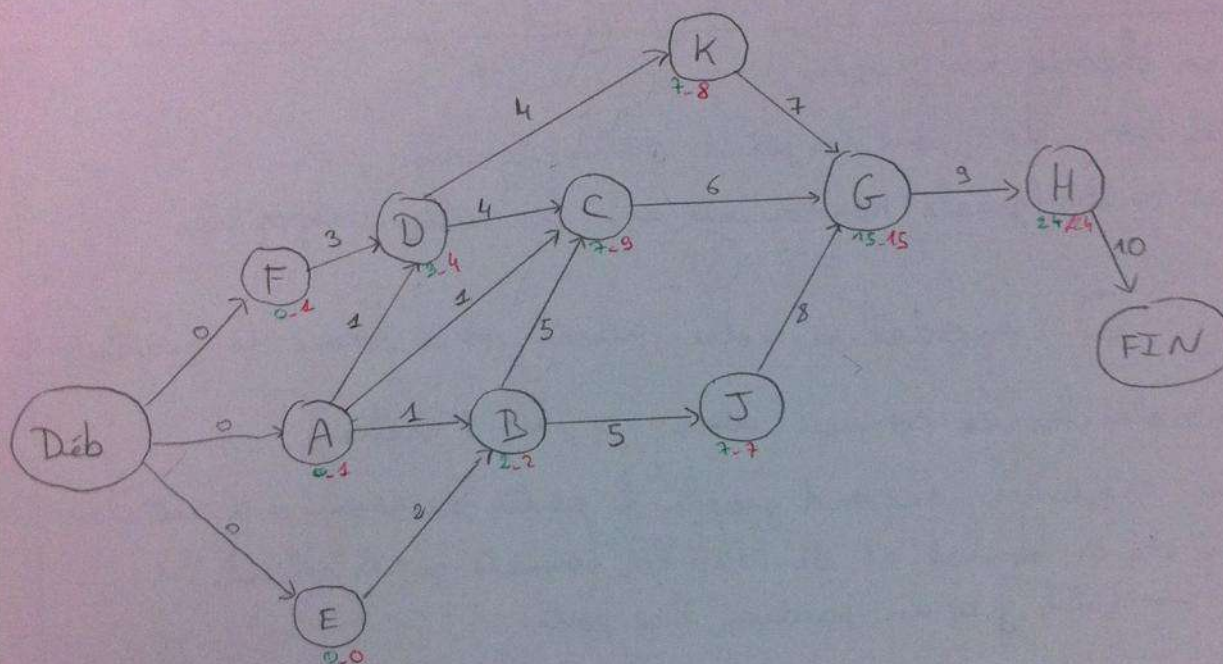
Q4- Graphe d'ordonnement

Soit le tableau de contraintes suivant :

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	J	K
Durée	1	5	6	4	2	3	9	10	8	7
Contraintes	Aucune	A, E	A, B, D	A, F	aucune	aucune	C, J, K	G	B	D

Les contraintes ci-dessus sont toutes de type « une tâche ne peut commencer que lorsqu'une autre est entièrement achevée. Par exemple : B ne peut commencer que lorsque A et E sont terminés ; F n'a aucune contrainte pour débiter.

Q4.1- Tracez le graphe d'ordonnement.



dates au plus tôt
dates au plus tard

Q4.2- Calculez le calendrier au plus tôt et le calendrier au plus tard, en supposant que la date au plus tard pour la fin de projet est égale à sa date au plus tôt.

Tâches	A	F	E	B	C	D	G	H	J	K		ω	Deb
Dates au plus tôt $\rightarrow$ max	0	0	0	2	7	3	15	24	7	7		34	0
Dates au plus tard $\rightarrow$ min-d	1	1	0	2	9	4	15	24	7	8		34	0

Q5- Modélisation

Comment répondre au problème ci-dessous à l'aide de la théorie des graphes ?

Un musée dispose de plusieurs salles d'exposition rectangulaires, beaucoup plus longues que larges, qui ressemblent plus à des couloirs qu'à des salles !...

Ces « couloirs » sont interconnectés par des petites salles rondes. Depuis l'une de ces salles rondes, on peut voir ce qui se passe dans chacune des salles d'exposition qui en partent.

On désire mettre en place une équipe de gardiens qui surveilleront toutes les salles d'exposition. On cherche à mettre le moins possible de gardiens, en évitant si possible qu'une même salle d'exposition soit surveillée par deux gardiens.

Comment trouver la solution ?

Avec la théorie des graphes :

- les sommets : sont les petites salles rondes.
- les arêtes (graphe non-orienté ici) : les salles d'exposition.

Algo : On modélise notre musée sous forme de graphes.

- On recherche le sommet avec le plus d'arêtes.
- On crée un second graphe à partir de ce sommet : il est alors composé de ce sommet et de tous les sommets qu'il relie.
→ Il y a un gardien à ce poste.
- Tant que le second graphe n'est pas égal à celui de départ
On cherche le sommet avec le plus d'arêtes qui n'a pas été ajouté dans le second graphe.
Si on l'ajoute, on poste un gardien.