

didier.achvar@efrei.fr

Introduction

Physique des capteurs	Application techno.	Instrumentat°
* Capteurs passif à variation R, L, C - Capteurs passif à variation de flux * Capteurs à effet PiezoElectrique " à effet Hall " " " PhotoElectrique " " " ThermoElec. " " " PyroElec (optique)	Capteur de déplacement " " force Accéléromètre Capteur de Temp. : Les microcapteurs	* Electronique associée: Conditionnement des signaux analogiques Convertisseur analogique numérique * Traitements associés, algo, méthodes mathématiques Ex: Géopositionnement Effet Doppler

Capteurs vs Application

	Déplacement Position Déformat°	Force accélérat°	Vitesse	Temp.	Lumière	Gaz, Chimie Humidité	Champs mag
R	Potentiomètre (codeur)	Jauges de contrainte		Sonde	Photorésistance	Résistivité ρ	Magnéto-résistance
L	Transfo Δ Courant de F	Magneto Struchif				Permittivité μ	
C	C variable	Electro Struchif				ϵ : cste diélec.	
ϕ			Tachymètre				
Piezo		Transducteur à ultrason					
Hall	Capteur de proximité						
Thermo				Thermocouple "Seebeck"			
Pyro				Thermométrie infra rouge			
Photo					Photodiode, & photoelec		
Doppler			x				

I/ Capteurs résistifs



$$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

potentiomètre
codeur angulaire
ou linéaire



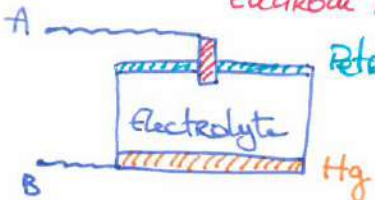
depend:

- milieu chimique
- température CTN, CTP: Thermistances
- rayonnement: Photo résistances
- contraintes mécanique (jauges)

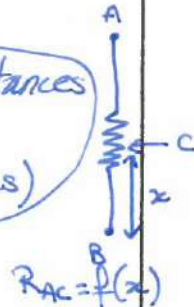
Ex: μ -capteur de déplacement

Electrode mobile

Petrole

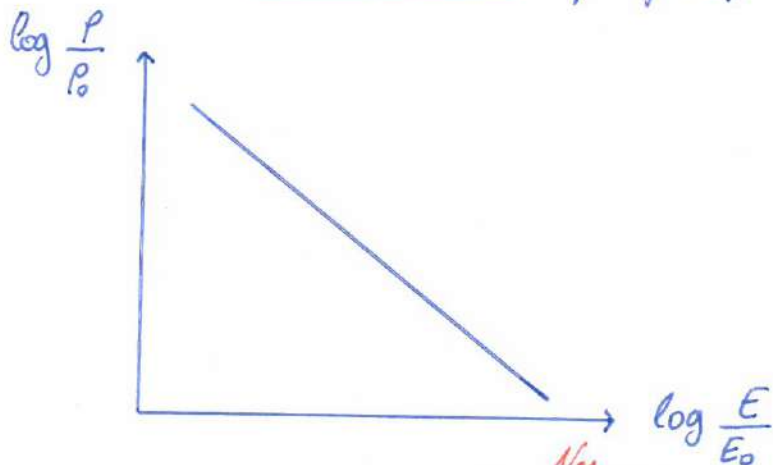


variation de la
section efficace
en fon° de la
posit° de l'électrode
mobile



1) Photorésistances (LDR)

$$\rho = f(E)$$



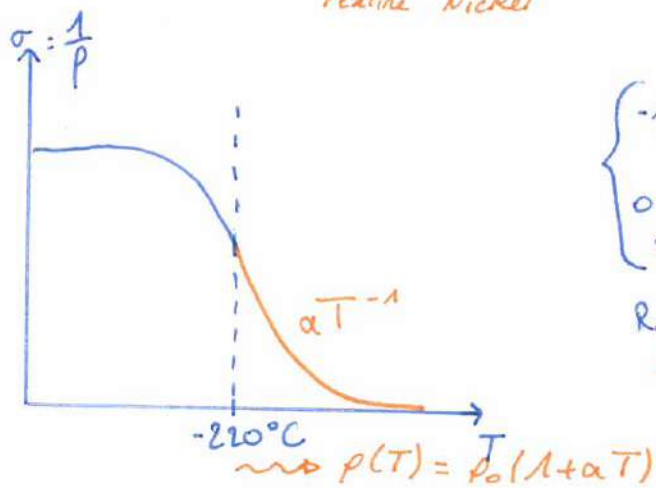
$$\rho(E) = \rho_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^{\text{Non linéaire}}$$

Autour d'un éclairement
de référence E_0

2) Thermorésistances

$$\rho = f(T)$$

* Chez les métaux (Pt, Ni)
Platine Nickel



Ex: Pt-100

$$\begin{cases} -180^\circ\text{C} < T < 0^\circ\text{C}: \\ R(T) = R_0(1 + AT + BT^2 + C(T-100)T^3) \\ 0^\circ\text{C} < T < 660^\circ\text{C}: \\ R(T) = R_0(1 + AT + BT^2) \end{cases}$$

$R_0 = 100 \Omega$

A, B, C $\Rightarrow$ Techno (cf. TD 1)

gammes:

$$\text{Cu} : -180^{\circ}\text{C} < T < 150^{\circ}\text{C}$$

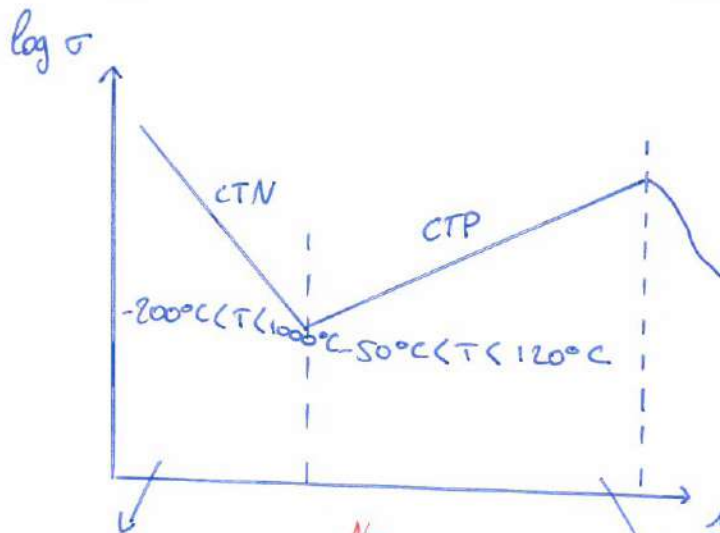
$$\text{Ni} : -60^{\circ}\text{C} < T < 180^{\circ}\text{C}$$

$$\text{Pt} : -250^{\circ}\text{C} < T < 1100^{\circ}\text{C}$$

$$\text{In} : -270^{\circ}\text{C} < T < 30^{\circ}\text{C}$$

Indium

α Chez les semiconducteurs CTP/CTN



Grande sensibilité: *Non linéaire*
Autour d'une T_0 :

$$\frac{R(T)}{R_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-b} \exp\left[\beta\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

$$1 < b < 4$$

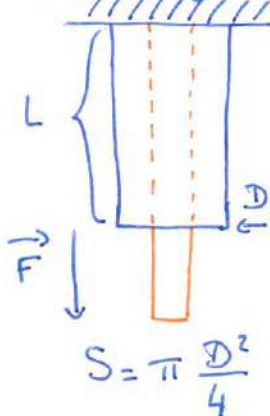
$$3000\text{ K} < \beta = \frac{qEg}{2k} < 5000\text{ K}$$

$$\frac{R(T)}{R_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}$$

Non linéaire

3) $\rho = f(\text{contrainte mica})$: Piezo résistivité

Conducteur cylindrique



Ⓐ Elasticité: $\frac{dD}{D} = -\nu \frac{dL}{L}$
↳ coef. de Poisson

Ⓑ Deformation: $F = E \frac{dL}{L}$
↳ coef. de Young

Ⓒ Piezo: $F = \frac{1}{\pi} \frac{dp}{\rho}$
↳ coef. de Piezo

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S} \Rightarrow \frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} - \frac{dS}{S}$$

$$\text{or } S = \pi \frac{D^2}{4} \Rightarrow \frac{dS}{S} = 2 \frac{dD}{D}$$

Donc $\frac{dR}{R} = \frac{dp}{\rho} + \frac{dL}{L} - 2 \frac{dD}{D}$

$$\frac{dR}{R} = (\pi E + 1 + 2\nu) \frac{dL}{L}$$

$$\frac{dR}{R} = \left(\pi + \frac{1+2\nu}{E} \right) F$$

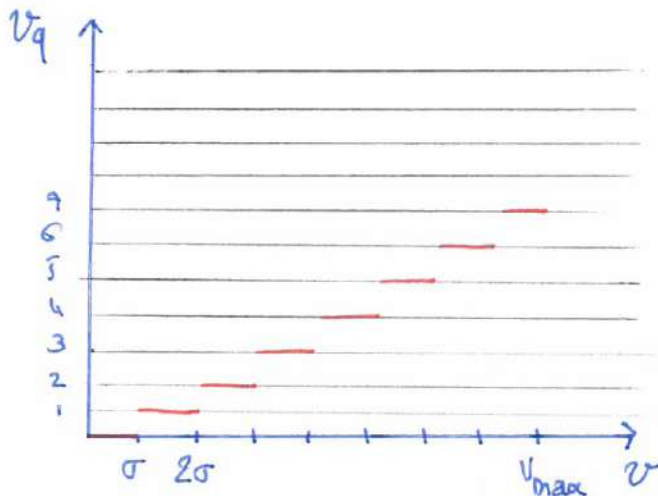
4) Convertisseur analogique numérique



$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i$$

Codage sur n états

4.1) Quantification



$$\frac{V_{\max}}{\sigma} = N+1$$

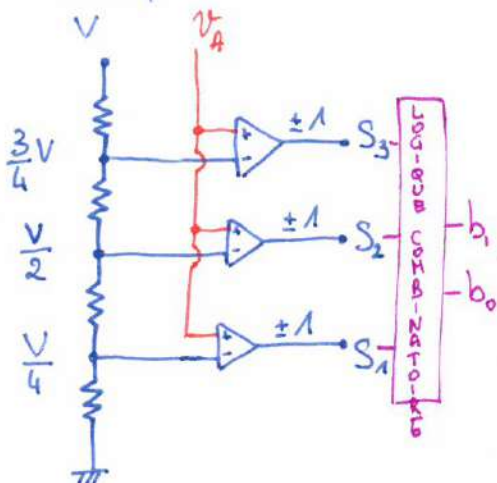
σ : pas de quantif.

$N+1$: nb de niveaux

$$\text{Résolution} = \frac{\text{pas}}{\text{pleine échelle}} = \frac{\sigma}{V_{\max}}$$

4.2) Techno Flash - CAN Flash

Exemple sur 4 niveaux



	S_3	S_2	S_1	Niveau	$b_1 b_0$
$v_A < \sigma$	-1	-1	-1	0	00
$\sigma < v_A < 2\sigma$	-1	-1	+1	1	01
$2\sigma < v_A < 3\sigma$	-1	+1	+1	2	10
$3\sigma < v_A < 4\sigma$	+1	+1	+1	3	11

Codage sur n bits $N=2^n$ niveaux

$\Rightarrow 2^n - 1$ niveaux de quantif.

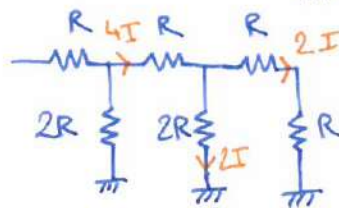
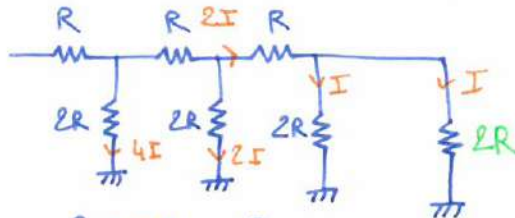
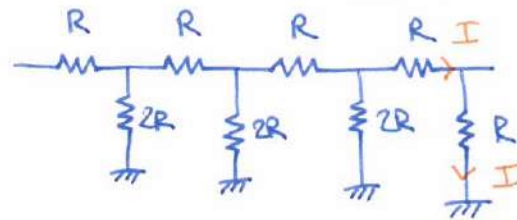
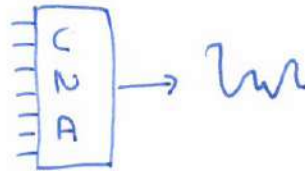
$\Rightarrow 2^n - 1$ comparateurs

⚠ **Coût & Encombrement**

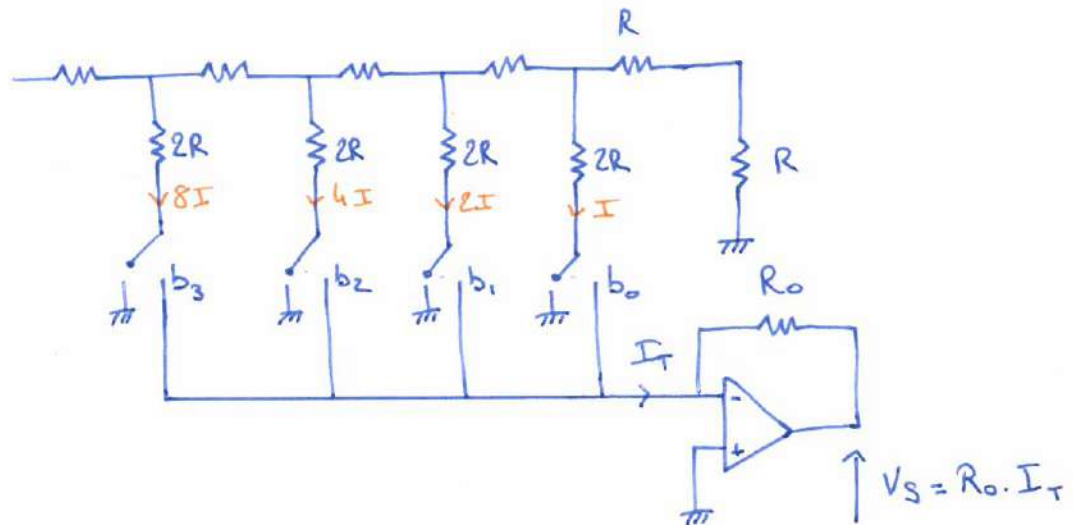
Ici $\sigma = \frac{V}{4}$

4.3) CNA

Techno R-2R



$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{eq}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\ &= \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} \\ &= \frac{1}{R} \end{aligned}$$



$$I_T = \left(\sum b_i 2^i \right) I$$

(pleine échelle)

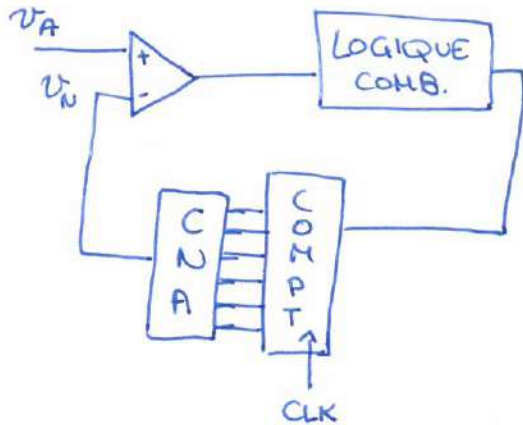
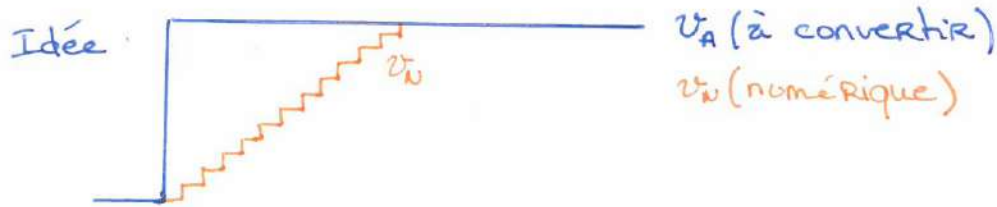
Ex: Calculer la tension de la PE d'un CNA 10 bit avec un pas de quantification de 10 mV.
Resolution.

$$\text{Niveaux : } 2^{10} = 1024$$

$$V_{max} = (2^{10} - 1) \cdot \sigma = 1023 \times 10 \cdot 10^{-3} = 10V$$

$$p = \frac{\sigma}{V_{max}} = 0,1 \% : \text{Resolution}$$

4.4) CAN à Rampe Numérique



Pb: Durée de conversion dépend de V_A

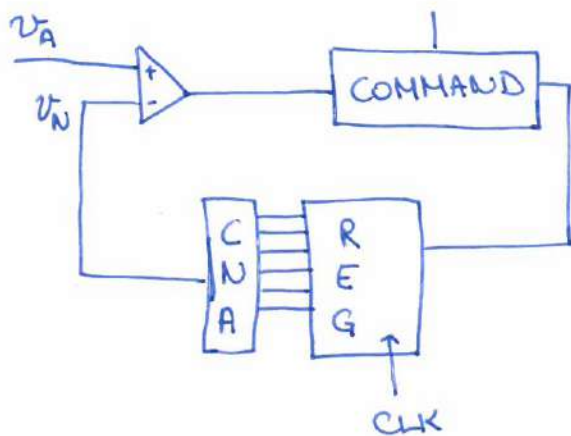
$$\frac{1}{f_{clk}} < \text{durée} < \frac{2^n - 1}{f_{clk}}$$

pour un CAN n bits
 $(N = 2^n - 1)$

4.5) CAN à pesées successives

Principe : Dichotomie + Comparaison

La valeur est comprise entre 0000000 et 1111111.
 On se place au milieu 1000000 et on compare la valeur pour savoir si on est avant ou après.

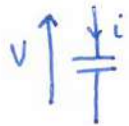


Espoir: $\text{Durée} = \frac{n}{f_{clk}}$

Exemple : Conversion de 10,4 V sur $n = 4$ bits avec $\sigma = 1V$

	b_3	b_2	b_1	b_0	
	0	0	0	0	
	0	0	0	1	
	0	0	1	0	
	0	0	1	1	
	0	1	0	0	
	0	1	0	1	
	0	1	1	0	
	0	1	1	1	
① ↓	1	0	0	0	MSB ← 1
③ ↓	1	0	0	1	
④ ↓	1	0	1	0	
⑤ ↓	1	0	1	1	
② ↓	1	1	0	0	MSB suivant ← 1
	1	1	0	1	
	1	1	1	0	
	1	1	1	1	

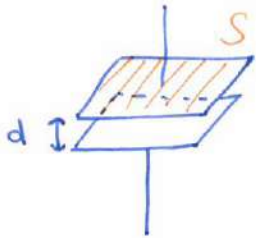
II / Capteurs capacitifs



$$C = \frac{Q}{V}$$

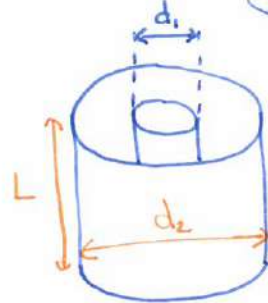
$$\begin{cases} i = \frac{dQ}{dt} \\ i = C \frac{dV}{dt} \end{cases}$$

Condensateur plan:



$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

Condensateur cylindrique



$$C = \frac{2\pi\epsilon L}{\ln(d_2/d_1)}$$

C dépend de ϵ , le matériau isolant, et de la géométrie du circuit.

ϵ : permittivité diélectrique de l'isolant

$$\epsilon = \epsilon_R \cdot \epsilon_0$$

relative vide

Application

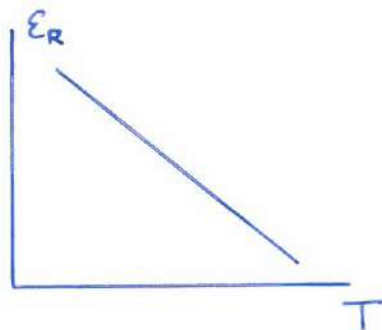
Variation de géométrie

↳ Déplacement, force, niveau

Variation de ϵ

↳ Température, milieu chimique

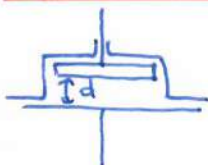
1) Mesure de température



$$\epsilon_R(T) = \epsilon_R(T_0)(1 - A(T - T_0))$$

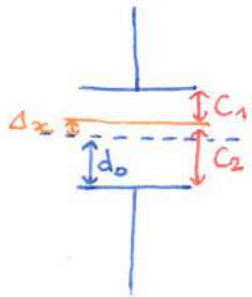
$T^0 \sim 1000^\circ\text{C}$: Céramique

2) Mesure de déplacement



$$C = \epsilon \frac{S}{d}$$

Très Non Linéaire

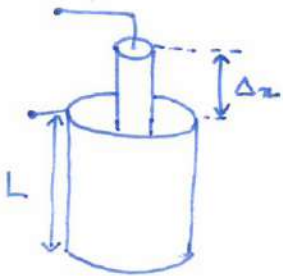


Deux capacités
Différentielles

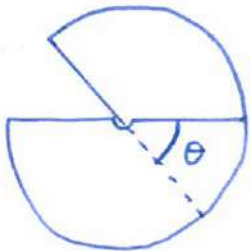
$$C_1 = \epsilon \frac{S}{d_0 + \Delta x}$$

$$C_2 = \epsilon \frac{S}{d_0 - \Delta x}$$

Meilleures linéarité



$$C = \frac{2\pi\epsilon(L - \Delta x)}{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}$$



$$S = \frac{1}{2} \theta \cdot R^2$$

Electronique associée (cf. TD3 4°)

* Pont AC

*

$$C \text{ --- } \boxed{\text{OSC}} \sim f \sim \frac{1}{RC}$$

$$C \text{ --- } \boxed{\text{OSC}} \sim f \sim \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

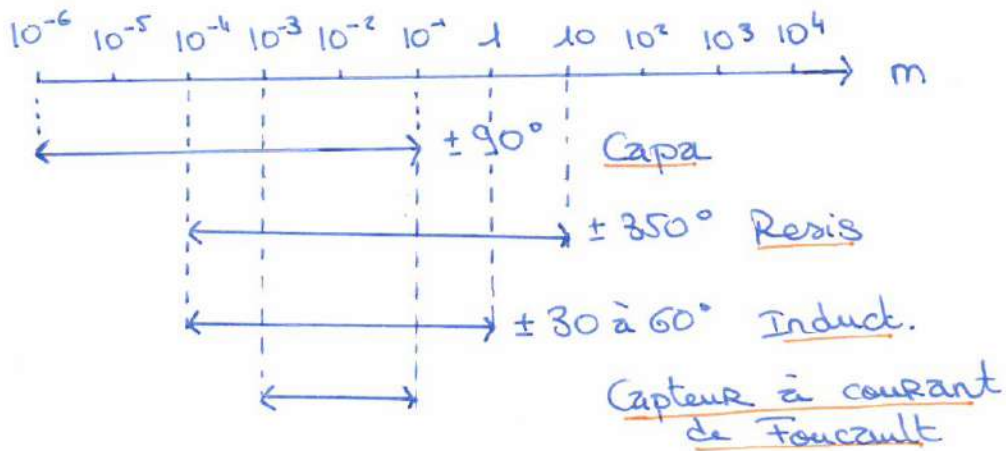
* Multivibrateurs

$$\boxed{M} \text{ --- } \text{---} \quad \text{---} \quad \delta \sim RC$$

$$\boxed{A} \text{ --- } \text{---} \quad \text{---} \quad T \sim RC$$

III / Capteurs inductifs

(Mesures cinématique : Déplacement / Vitesse)

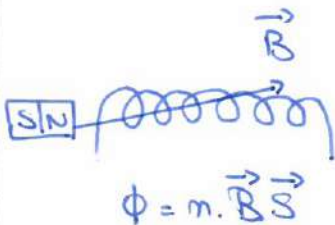
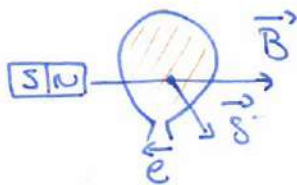


1) Principe d'induction, Auto-induction, Mutuelle induction

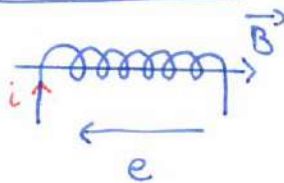
Induction

$$e = \frac{d\phi}{dt}$$

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S}$$



Auto-induction



$$\phi = Li \text{ avec } L = \mu S \frac{n^2}{l} \text{ [Henry]}$$

$$i \Rightarrow B \Rightarrow \phi \Rightarrow e$$

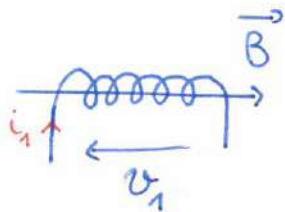
$$e = \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

S: section n: spires

l: longueur $\mu = \mu_0 \mu_r$

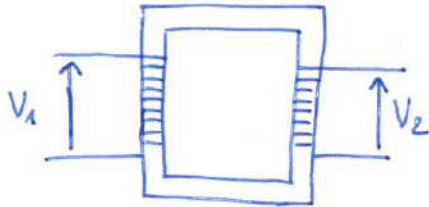
$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ u.s.i}$$

Mutuelle induction



$$v_2 \neq 0 \Rightarrow v_2 = M \cdot \frac{di_1}{dt}$$

(Principe du transformateur)



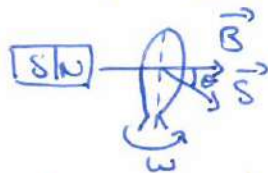
Capteur à
Variation
de L



μ varie
 $\Rightarrow L$ varie
avec d

Capteur à
Variation
de ϕ

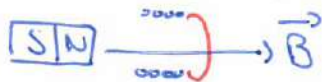
Ex: Tachymètre
(vitesse)



$$\phi = BS \cos \omega t$$

$$e = -BS\omega \sin \omega t$$

Ex: microphone
électrodynamique



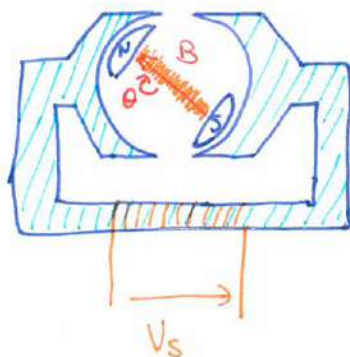
Capteur à variat°
de mutuelle
induct° M

- LVDT

- Capteur Foucault
(Eddy Current Sensor)

2) Exemples de réalisation

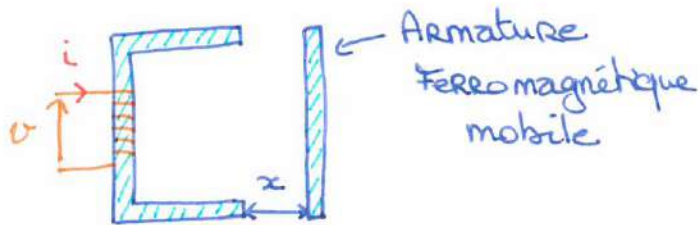
* Tachymètre



$$V_s = BS \Omega(t) \sin \theta$$

$$\Omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

3) Mesure petit déplacements



$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$L(x) = \frac{1}{2} N^2 \mu_0 S \frac{1}{x}$$

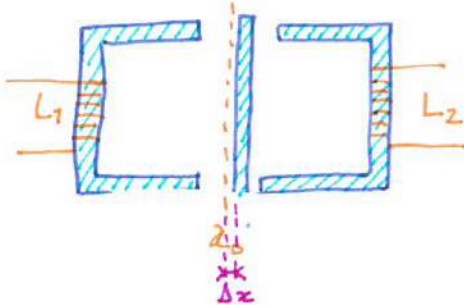
$$x = x_0 + \Delta x$$

x_0 : Référence

$$L = L_0 \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta x}{x_0}}$$

$$L_0 = L(x_0) = \frac{1}{2} N^2 \mu_0 S \frac{1}{x_0}$$

$$L(x) = L_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^3 \dots \right) \quad \text{Fort + Non Linéaire}$$



$$L_1(x) = L_0 \left(1 - \frac{\Delta x}{x_0} + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^3 \dots \right)$$

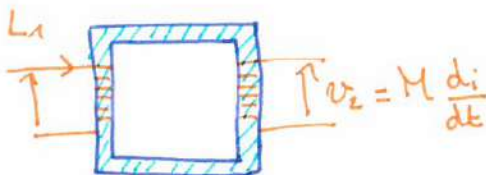
$$L_2(x) = L_0 \left(1 + \frac{\Delta x}{x_0} + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^3 \dots \right)$$

$$L_2(x) - L_1(x) = 2 L_0 \left(\frac{\Delta x}{x_0} + \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right)^3 + \dots \right)$$

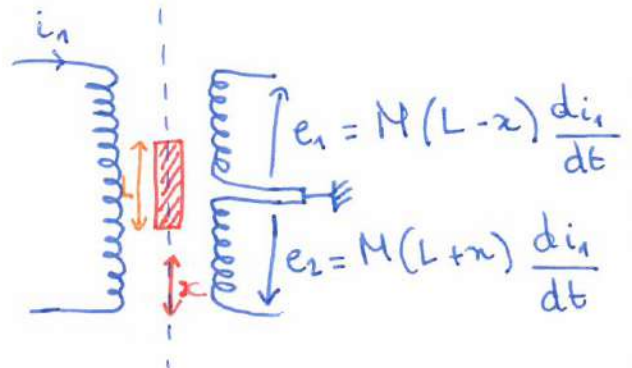
Améliore la linéarité et augmente la sensibilité

4) Mesure de déplacement avec LVDT

(Principe de variation de Mutuelle)



LVDT:



Conditionnement:

$$f(x) = \frac{e_1 - e_2}{e_1 + e_2} = \frac{M(L-x) - M(L+x)}{M(L-x) + M(L+x)} \quad \text{indépendant de } i_1$$

Tentons 1 DL pour $x \approx 0$

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x \quad f(0) = 0$$

$$f(x) = f'(0) \cdot x$$

$$f'(0) = ?$$

$$f'(x) \Big|_0 = \frac{[-M'(L-x) - M'(L+x)][M(L-x) + M(L+x)]}{[M(L-x) + M(L+x)]^2} \Big|_0$$

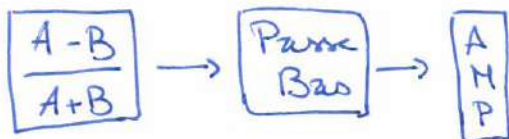
$$\Rightarrow \frac{-[-M'(L-x) + M'(L+x)][M(L-x) - M(L+x)]}{[M(L-x) + M(L+x)]^2} \Big|_0$$

$\Big|_0 \Rightarrow$ pour $x=0$

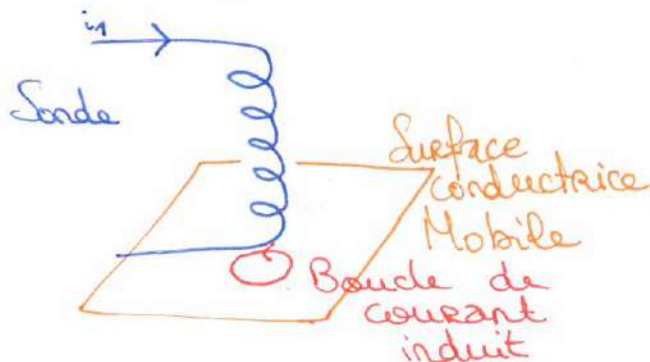
$$\Leftrightarrow f'(x) \Big|_0 = \frac{-2M'(L) \cdot 2M(L)}{4M^2(L)} \Big|_0$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{M'(L)}{M(L)} \cdot x + \underbrace{\beta x^2 + \gamma x^3 + \dots}_{\text{Non Linéarité}}$$

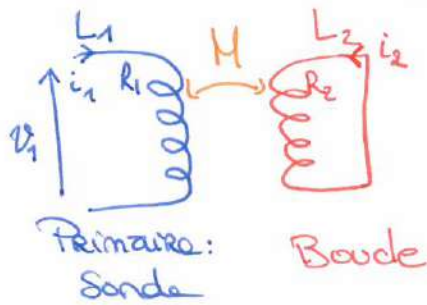
$\hookrightarrow$ Coef. ct: α



5) Capteur à courant de Foucault "Capteur sans contact"



Modèle électrique sonde/Boucle



$$\begin{cases} V_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M(x) \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M(x) \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

$V_2 = 0$ car boucle fermée

Régime sinusoïdale $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$

$$\begin{cases} V_1 = (R_1 + jL_1\omega) I_1 + jM\omega I_2 \\ 0 = (R_2 + jL_2\omega) I_2 + jM\omega I_1 \rightarrow I_2 = -\frac{jM\omega I_1}{R_2 + jL_2\omega} \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_1 = \left[(R_1 + jL_1\omega) + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + jL_2\omega} \right] I_1$$

Impédance équivalente de la SONDE
 Z_c

$$\Rightarrow Z_c = R_1 + jL_1\omega + \frac{(M\omega)^2 (R_2 - jL_2\omega)}{R_2^2 + (L_2\omega)^2}$$

$$\Rightarrow Z_c = \left(R_1 + \frac{R_2 (M\omega)^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} \right) + j\omega \left(L_1 - \frac{L_2 (M\omega)^2}{R_2^2 + (L_2\omega)^2} \right)$$

Résistance équivalente
 R_C

Induction équivalente
 L_C

Problème à considérer au moment de la mise en œuvre

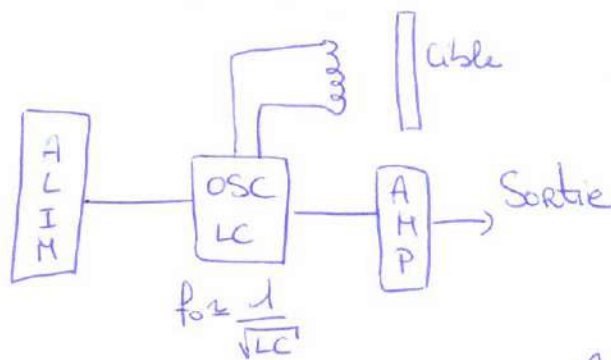
* Ce qui nous intéresse $\frac{\Delta L_C}{L_C}$, mais il faut considérer R_C

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \frac{\Delta M}{M} \\ \uparrow \\ \frac{\Delta x}{x} \end{array}$$

* Etalonnage nécessaire

5.1) Annexe TD4

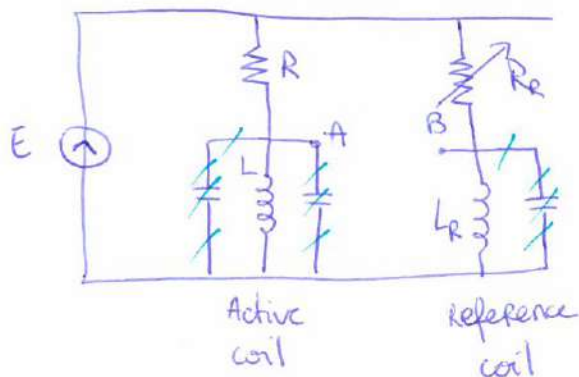
* Le KD-2440 : "Basic" (Conditionnement de base)
basé sur des oscillateur LC



Très non linéaire



* Le pont inductif KD-2300
(cf TD4, Q2 et Q3)



Pour simplifier
oublions les capas

$$L = L_0 + \Delta L$$

$$= L_0 \left(1 + \frac{\Delta L}{L_0} \right)$$

$$V_{AB} = \left(\frac{j\omega L}{R + j\omega L} - \frac{j\omega L_R}{R_R + j\omega L_R} \right) E = \left(\frac{j\omega L R_R - j\omega L_R R}{(R + j\omega L)(R_R + j\omega L_R)} \right) E$$

$$= \left(\frac{j\omega (L R_R - L_R R)}{(R + j\omega L)(R_R + j\omega L_R)} \right) E$$

équilibre du pont:

On veut à $\Delta L = 0$ $V_{AB} = 0$

$$\Rightarrow L_0 R_R = L_R R$$

$\Rightarrow$ Nécessité de R_R variable ce qui nécessite un réglage préalable de "zéro".

$$V_{AB} = \frac{j \cdot \Delta L R \omega}{(R + jL_0(1 + \frac{\Delta L}{L_0})\omega)(R + jL_0\omega)} E$$

Réponse non linéaire car $\frac{\Delta L}{L_0}$ au dénominateur

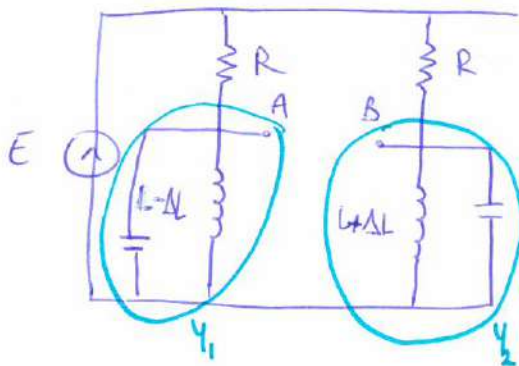
d'information est contenue dans l'amplitude de V_{AB}

⇒ démodulat° AM
(demod. synchrone)

↓
Multiplieur

↓
Filtre passe-bas

* de pont de capteurs différentiel KD-5100
(cf. TD4, Q4)



$$L = L_0 + \Delta L = L_0(1 + \frac{\Delta L}{L_0})$$

$$Y = jC\omega + \frac{1}{jL\omega} = jC\omega + \frac{1}{jL_0(1 \pm \frac{\Delta L}{L_0})\omega}$$

$$Y \approx jC\omega + \frac{1}{jL_0\omega} (1 \pm \frac{\Delta L}{L_0})$$

$$\begin{cases} Y_2 = jC\omega + \frac{1}{jL_0\omega} (1 - \frac{\Delta L}{L_0}) \\ Y_1 = jC\omega + \frac{1}{jL_0\omega} (1 + \frac{\Delta L}{L_0}) \end{cases}$$

Sortie du pont:

$$V_{AB} = \left(\frac{Z_1}{R + Z_1} - \frac{Z_2}{R + Z_2} \right) E$$

$$= \left(\frac{1}{1 + RY_1} - \frac{1}{1 + RY_2} \right) E$$

$$= \frac{R(Y_2 - Y_1)}{1 + R(Y_1 + Y_2) + R^2 Y_1 Y_2} E$$

$$\text{Gr } y_2 - y_1 = - \frac{2 \Delta L}{L_0}$$

$$\text{et } y_1 + y_2 = 2 \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L_0} \right)$$

$$\text{et } y_1 y_2 = \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L_0} \right)^2 - \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right)^2$$

$$\Rightarrow V_{AB} = \frac{-2R \frac{\Delta L}{L_0} \cdot E}{1 + 2 \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L_0} \right) + \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L_0} \right)^2}$$

$$= \frac{-2R \left(\frac{\Delta L}{L_0} \right) \cdot E}{\left[1 + \left(j\omega C + \frac{1}{j\omega L_0} \right) \right]^2}$$

▷ Gagné en linéarité

6) Les Resolvers (Mesure d'angle)

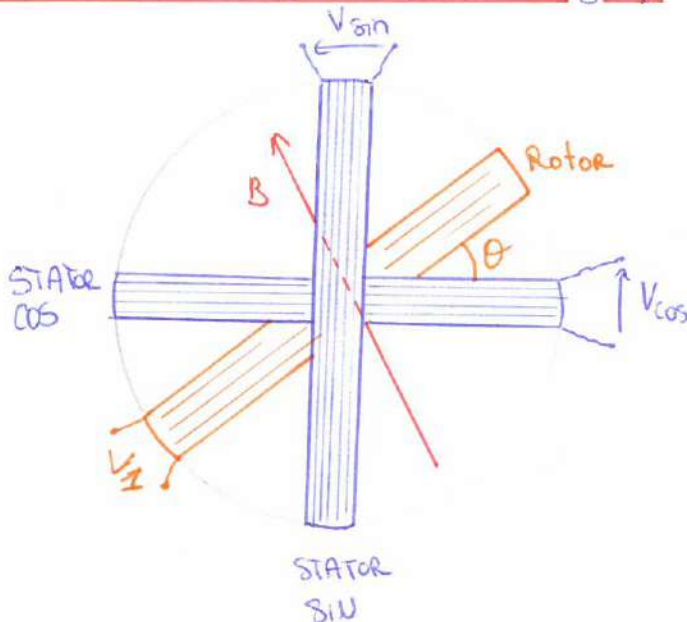
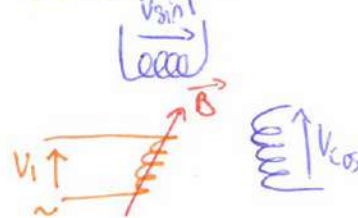


Schéma Equivalent



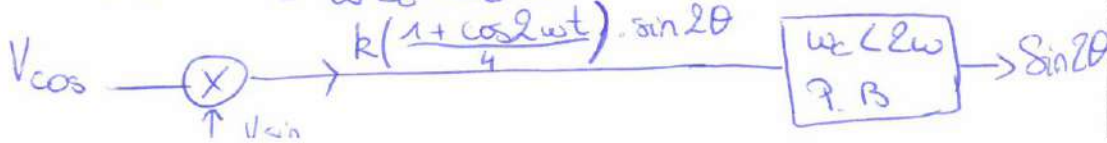
Si V_i variable
 $\Rightarrow \vec{B}$ variable
 $\Rightarrow B = B_0 \cdot \sin \omega t$
 $\Rightarrow \Phi$ variable dans les stator
 $\Rightarrow V_{\sin} \neq 0$
 $V_{\cos} \neq 0$

$$\begin{cases} \Phi_{\text{STAT COS}} = BS \cdot \cos \theta \\ \Phi_{\text{STAT SIN}} = BS \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = BS \cdot \sin \theta \end{cases}$$

Bien sur:

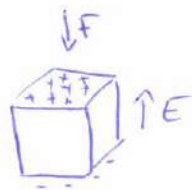
$$V_{\cos} = \frac{d\Phi_{\text{STAT COS}}}{dt} = \omega B_0 \cos \omega t \cdot S \cdot \cos \theta$$

$$V_{\sin} = \dots = \omega B_0 \cos \omega t \cdot S \cdot \sin \theta$$



IV / Capteurs Piezoélectrique

1) Principe

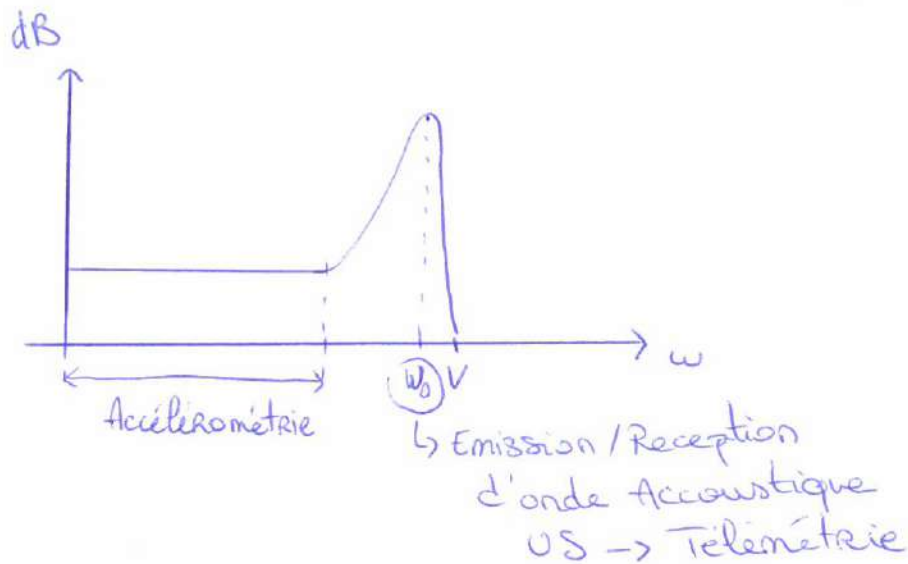


$$Q = kF$$

Apparition d'une charge sous l'effet de la force

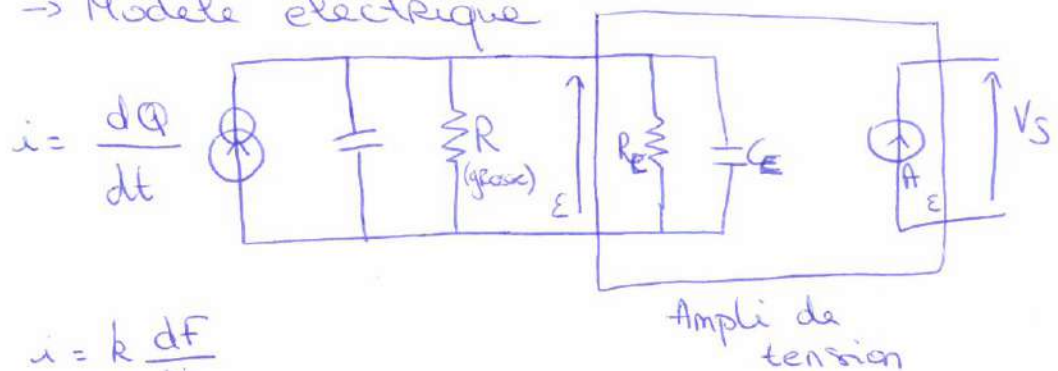
Réversibilité

Déformation suite à l'apparition d'un champ $\vec{E}$



2) Circuit de conditionnement

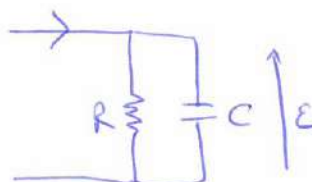
→ Modèle électrique



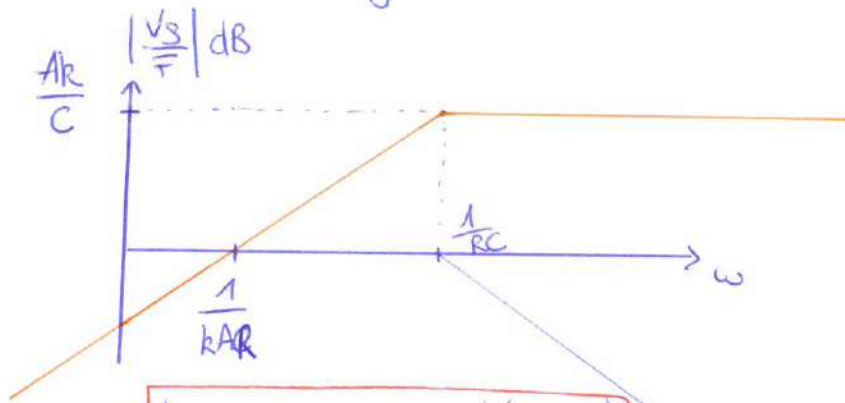
$$i = k \frac{dF}{dt}$$

$$I = jk\omega F$$

Modèle, Ampli
Entrée



$$\begin{aligned}
 V_s &= G \cdot E = G \cdot (R // C) i \\
 &= G \frac{\frac{R}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} j\omega \\
 &= \frac{GR \cdot j\omega}{1 + jRC\omega}
 \end{aligned}$$

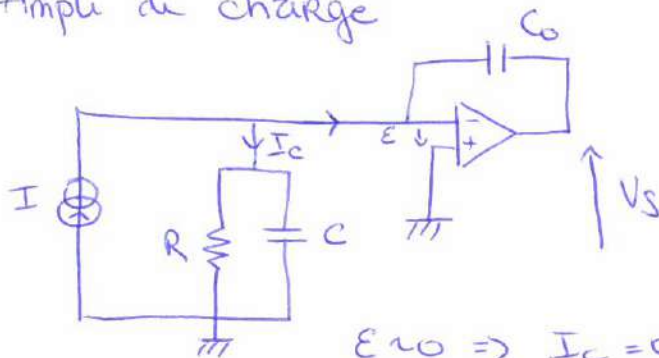


⇒ La réponse dépend de la fréquence

⇒ Ampli de Tension

⇓

Ampli de charge

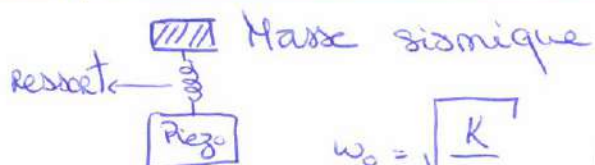


$$E \approx 0 \Rightarrow I_C = 0$$

$$\text{donc } I = j\omega C_0 V_s = jk\omega F$$

$$V_s = \frac{k}{C_0} F : \text{Indépendante de } \omega$$

3) Application en accélérométrie

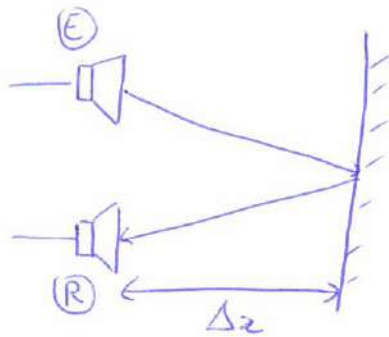


$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

On travaille à $\omega < \omega_0$

V / Télémétrie

1) Télémétrie par temps de vol

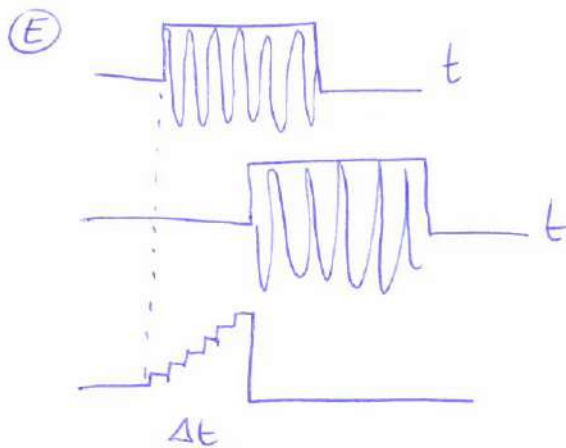


v : la vitesse de l'onde

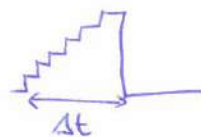
$$v = 350 \text{ m/s}$$

(onde acoustique)

$$v = \frac{2\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = \frac{v\Delta t}{2}$$



* Choix de l'horloge du compteur



- Pour une précision de $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$

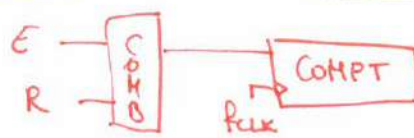
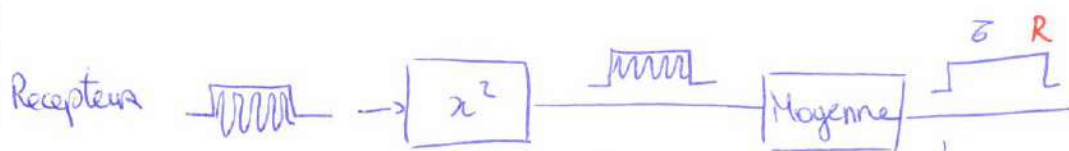
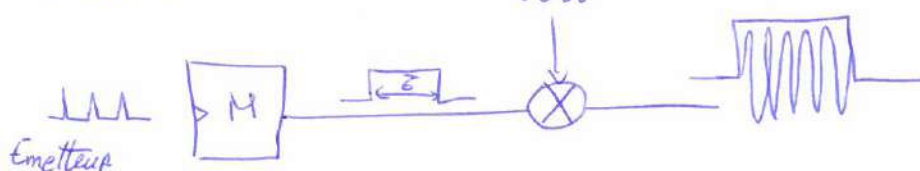
$$\Delta t_{\text{clk}} = \frac{2\Delta x}{v}$$

$$f_{\text{clk}} = \frac{v}{2\Delta x} = \frac{350}{2 \cdot 10^{-2}} = \frac{35000}{2} = 17500 \text{ Hz}$$

- Précision $1 \text{ dm} = 0.1 \text{ m}$

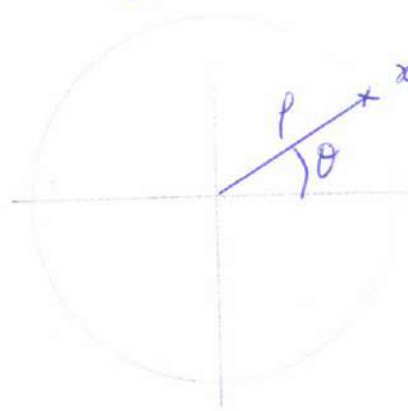
$$f_{\text{clk}} = 1750 \text{ Hz}$$

Circuit télémétrie



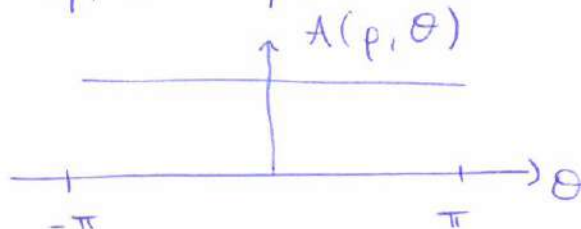
VI / Directivité / Optimisation

Hypothèse : source ponctuelle / omnidirectionnelle

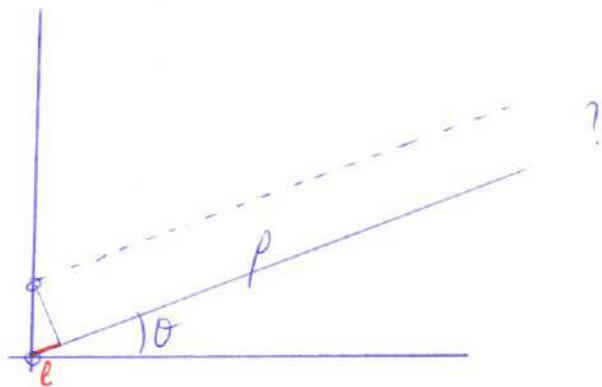


$$x(t, \vec{r}) = A(r, \theta) \cos(\omega t + \phi)$$

↓
 $A(r, \theta) = A(r) : \text{Omnidirectionnelle}$



1) Association de deux sources



Examiner la
Résultante des
deux sources en
champs lointain

$$x(t) = A(r) \cos(\omega t + \phi) \quad [\text{l'onde qui arrive en retard}]$$

$$= A(r) \cos\left(\omega \left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right)$$

Δt

$$\omega = 2\pi f \quad f = \frac{c}{\lambda}$$

$$\Delta t = \frac{\phi}{\omega} = \frac{l}{c} \quad l = d \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow l = \frac{\phi c}{\omega}$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{lw}{c} = \frac{2\pi c}{\lambda c} \cdot d \sin \theta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta}$$

Notation complexe :

$$x(t) = A(r) \cos(\omega t + \phi)$$

$$\hookrightarrow A(r) e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$A(r) e^{j\omega t} e^{j\phi}$$

$$X = A(r) e^{j\phi}$$

Résultante :

$$Y = A(r) + A(r) e^{j\phi}$$

$$Y = A(r) (1 + e^{j\phi})$$

$$Y = A(\rho) \cdot e^{j\frac{\phi}{2}} (e^{j\frac{\phi}{2}} + e^{-j\frac{\phi}{2}})$$

$$Y = 2A(\rho) e^{j\frac{\phi}{2}} \cos \frac{\phi}{2}$$

$$|Y| = 2|A(\rho)| \cdot \cos\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta\right)$$

↳ Dépendance en θ

