

I. Rappels de probas

Expérience aléatoire

- variable aléatoire: décrive l'issue de l'expérience
- univers: ensemble de toutes les issues possible Ω
- événements: on décompose l'univers en sous-ensemble décrivant les issues possibles
- mesures de proba $p \in [0, 1]$

événements élémentaires: événements qu'on ne peut pas découper davantage.

Ensemble discret

Soit Ω discret, et même fini

$p: \underset{\substack{\uparrow \\ \Omega}}{A} \mapsto p(A)$ « la probabilité que l'événement A se produise ».

$\underset{A}{A} \rightarrow A \text{ sous-ensemble de } \Omega$

Si A est un « événement aléatoire », $A = \{\omega\}$ avec $\omega \in \Omega$

$$p(A) = p(\{\omega\}) = p(\omega).$$

Pour que cette construction ait un sens, il faut que

→ relation entre les issues possibles de l'expérience.

Il arrive que (2 issues possibles) A et B se produisent ensemble

l'événement B entraîne obligatoirement la réalisation de l'événement A .

→ relation entre les sous-ensembles de Ω .

$$A \cap B \neq \emptyset$$

$$B \subset A.$$

- un événement "presque impossible" est un événement A tel que $p(A) = 0$.
- Si $B \subset A$, alors $p(B) \leq p(A)$.
- $p(\Omega) = 1$.
- un événement A de proba 1 est dit « presque certain » ou « presque sûr ».
- $\{\omega \in \Omega \mid p(\{\omega\}) \neq 0\} = \text{« support de } p \text{ »}$
- Si A et B sont des événements incompatibles (A et B sont de sous-ensembles disjoints, $A \cap B = \emptyset$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$
- $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.
- $p(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.
- Exemple : probabilité uniforme.

$$\forall \omega \in \Omega \quad p(\omega) = \frac{1}{\text{cardinale } \Omega}$$

$$\forall A \subset \Omega \quad p(A) = \frac{\text{cardinale } A}{\text{card } \Omega}$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

Exemple : jet de deux dés.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{(a, b) \mid a \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \quad b \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\} \\ &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2. \end{aligned}$$

$$p(\text{« obtenir un 3 et un 4 »}) = p(\{(3, 4) (4, 3)\}) = \frac{1}{18}.$$

$$\text{car cardinale } (\Omega) = 36.$$

Exemple 2 : population de n électeurs.

On veut faire un sondage : on choisit au hasard un échantillon de p individus.

$$n = 20\,000\,000$$

$$p = 2000.$$

$$\Omega = E^p$$

$$\text{card } E = n.$$

Exemple 3 : le loto.

6 boules parmi 50 numérotées de 0 à 49.
6 tirages sans remise.

$$\Omega = \{A \subset [0, 49] \mid \text{card } A = 6\}$$

$$= \{A \in \mathcal{P}([0, 49]) \mid \text{card } A = 6\}$$

$$= C_{50}^6$$

$$= \binom{50}{6}$$

« Ensemble des probas de $[0, 49]$ »

$$= \{A \subset [0, 49]\}$$

Exemple 4

Soit E un ensemble de cardinal n . On tire au hasard une poignée F de p éléments de E , puis on la remet, puis on tire une autre poignée G de q éléments.

$$\Omega = \{(F, G) \mid F \subset E, G \subset E, \text{card } F = p, \text{card } G = q\}.$$

Les variables aléatoires

Soit E un ensemble

Une variable aléatoire X est une fonction :

$$X : \Omega \rightarrow E$$

$$\omega \mapsto X(\omega)$$

Si $A \subset E$, l'ensemble $X^{-1}(A)$ (les éléments antécédents) sera noté $X \in A$. c'est donc un événement.

Exemple 1 :

$$X_1 : (a, b) \mapsto a$$

$$X_2 : (a, b) \mapsto b$$

$$S : \omega \mapsto X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

$$(S = X_1 + X_2)$$

$$S : \Omega \rightarrow [2, 12]$$

Exemple 2 vote avec 2 candidats.

$$E = E_1 \cup E_2$$

indiv. qui votent pour le candidat 1

indiv. qui votent pour le candidat 2.

$$X_i : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \mapsto x_i \in E$$

$$Y_i : (x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \in E_1 \\ 0 & \text{si } x_i \in E_2 \end{cases}$$

$$Z_1 = \sum_{i=1}^p Y_i : \Omega \rightarrow [0, p] \quad Z_1 : \text{nb d'individus qui ont voté pour candidat 1}$$

$$Z_2 = p - Z_1$$

Exemple 4 de la page 3:

On a une variable aléatoire $(F, G) \mapsto \text{card}(F \cap G)$

Indicateurs

L'indicateur d'un sous-ensemble $A \subseteq E$ est la fonction:

$$1_A : E \rightarrow \{0, 1\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B, \quad 1_{A^c} = 1 - 1_A.$$

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_A \times 1_B.$$

note: A^c : complément de A

Expérience d'une variable aléatoire numérique

Si $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ on définit son expérience.

$$E(X) = \sum_{x \in \mathcal{X}(X)} x p(X=x) \quad \{ \omega \in \Omega / X(\omega) = x \}$$

ensemble des valeurs possibles de X

$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega)$$

Propriétés :

- **linéarité** : si X, Y sont deux v.a. numériques et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$.
- **positivité** : si X est une v.a. positive, alors $E(X) \geq 0$ et n'est nul que si X est presque sûrement nul (c'est-à-dire que $p(X=0) = 1$).
- **convexité** : si f est une fonction réelle convexe (ie $\forall \alpha, \beta, x, y \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$)
 $f(E(X)) \leq E(f(X))$
- Si $A \subset \Omega$, $\mathbb{1}_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire
 $E(\mathbb{1}_A) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{1}_A(\omega) p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$
 $E(\mathbb{1}_A) = p(A)$

Loi d'une variable aléatoire

Si X est une v.a. $X: \Omega \rightarrow E$ $X(\Omega) \subset E$
la loi de probabilité de X c'est $\pi_X: A \rightarrow \pi_X(A) = p(X \in A)$
 $\uparrow$
 $X(\Omega)$

Exemple 2 page 3

La loi de proba d'une variable qui ne prend que 2 valeurs est dite « loi de Bernoulli »

$$\pi_{X_1}(\{1\}) =$$

$$\frac{\text{card } E_1}{\text{card } E}$$

$$Y_1(\Omega) = \{0, 1\}$$

→ paramètre de la loi de Bernoulli

Soit $0 \leq k \leq p$

$$\begin{aligned} \pi_{Z_1}(\{k\}) &= p(Z_1 = k) \\ &= \frac{\text{card}(Z_1 = k)}{\text{card } \Omega} \\ &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_1(\Omega) &= \{0, p\} \\ \text{card } \Omega &= \text{card}(E^p) = n^p \end{aligned}$$

$$\text{card} \{ \underbrace{(x_1, x_2, \dots, x_k)}_{\text{vote pour candidat 1}}, \underbrace{(x_{k+1}, \dots, x_p)}_{\text{vote pr. candidat 2}} \} = (\text{card } E_1)^k \cdot (\text{card } E_2)^{p-k}.$$

$$\text{card}(Z_1 = k) = C_p^k (\text{card } E_1)^k (\text{card } E_2)^{p-k}$$

$$\begin{aligned} \text{donc : } \pi_{Z_1}(k) &= \frac{C_p^k (\text{card } E_1)^k (\text{card } E_2)^{p-k}}{n^k n^{p-k}} \\ &= C_p^k \left(\frac{\text{card } E_1}{n} \right)^k \left(\frac{\text{card } E_2}{n} \right)^{p-k} \\ &= C_p^k x^k (1-x)^{p-k} \end{aligned}$$

$1 - \frac{\text{card } E_1}{n}$

Une telle loi s'appelle loi binomiale de paramètres p et x .

Exemple 4 p. 3

$$X: (F, G) \mapsto \text{card } F \cap G \in [\max(p+q-n, 0), \min(p, q)]$$

$$\begin{aligned} \pi_X(k) = p(X=k) &= \frac{C_n^p C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^p C_n^q} \\ &= \frac{C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^q} \quad \text{loi hypergéométrique de} \\ &\quad \text{paramètres } n, p, q. \end{aligned}$$

Remarque :

Si $X: \Omega \rightarrow E$ et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$

$$E(\underbrace{f(X)}_{\downarrow f \circ x: w \mapsto f(X(w))}) = \sum_{w \in \Omega} f(X(w)) p(w) = \sum_{x \in X(\Omega)} \underbrace{f(x) \pi_X(x)}_{\text{}} = E(f(x))$$

Exemple

$$E(X) = \sum x^2 \pi_X(x).$$

(« moment d'ordre 2 »)

Loi de couple

Si X_1 et X_2 sont 2 v.a.

$$\pi_{X_1 \times X_2} : \{(a, b) \mid a \in X_1(\Omega), b \in X_2(\Omega)\} \rightarrow [0, 1]$$

$$(a, b) \mapsto p(X_1=a \text{ et } X_2=b) = p(\{w \in \Omega \mid X_1(w)=a \text{ et } X_2(w)=b\})$$

On peut revenir, étant donné la loi de couple aux lois marginales π_{X_1} et π_{X_2} .

En effet $\pi_{X_1}(a) = p(\{w \in \Omega \mid X_1(w)=a\})$

$$= p\left(\bigcup_{b \in X_2(\Omega)} \{w \in \Omega \mid X_1(w)=a \text{ et } X_2(w)=b\}\right)$$

$$= 1$$

25/10/2010

Exercices

Exemple 1 p.2. $p(\text{Somme des 2 dés est un multiple de 3})?$

Exemple 2 p.3 $p(\text{le 1er individu sondé} = \text{le dernier individu sondé})$

Exemple 3 p.3 $p(\text{6 numéros} > 30)?$

Exemple 4 p.3 $p(F \subset G)?$

Exe 1: multiples de 3 avec 2 dés : 3, 6, 9, 12.

3: (1,2)(2,1)

6: (2,4)(4,2)(3,3)(5,1)(1,5)

9: (6,3)(3,6)(5,4)(4,5)

12: (6,6)

$$\Omega = 6 \times 6 = 36.$$

$$pp(\Sigma \text{ multiple de 3}) = \frac{\text{nb de possibilités}}{\text{card } \Omega} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}.$$

Ex.2:

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } E^p} = \frac{\text{card } A}{n^p} = \frac{n^{p-1}}{n^p} = \frac{1}{n}.$$

$$\text{card } A = n^{p-1}$$

Ex. 3.

$$p(A) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{50}{6}} = \frac{20 \times 19 \times \dots \times 15}{50 \times 49 \times \dots \times 45}$$

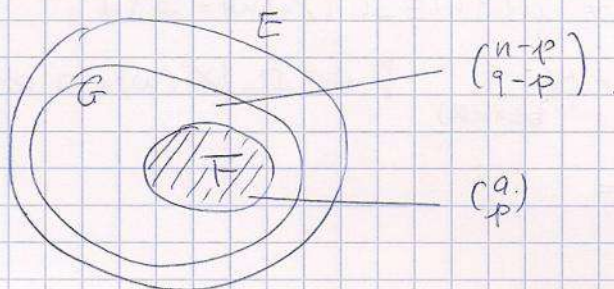
$$[0.49] = [0.49]_{nZ}$$

Ex. 4 $p(F \subset G) = 0$ si $p > q$

$$\frac{C_n^q}{C_n^p} \rightarrow \text{card } A$$

$$\frac{C_n^p}{C_n^q} \rightarrow \text{card } \Omega$$

$$C_{n-p}^{q-p} C_n^p = \frac{(n-p)! n!}{(q-p)! (n-p-q+p)! p! (n-p)!} = C_n^q C_q^p = \frac{n! q!}{q! (n-q)! p! (q-p)!}$$



ex2: $\prod_{i=1}^n A_i = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, n\} \\ I \neq \emptyset}} (-1)^{\text{card } I - 1} \prod_{i \in I} A_i$

pour $n=4$: $\prod_{i=1}^4 A_i + \prod_{i=1}^4 A_i - \prod_{i=1}^4 A_i - \dots - \prod_{i=1}^4 A_i$
 $+ \prod_{i=1}^4 A_i + \prod_{i=1}^4 A_i$
 $- \prod_{i=1}^4 A_i$

Soit $x \in E \rightarrow$ soit $x \notin \bigcap_{i=1}^n A_i$ toutes les indicateurs sont nulles.
 $\rightarrow$ sinon, supposons que $x \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$
 $1 = C_2^1 - C_2^2$

Plus généralement

$$1 = C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \dots \pm C_k^k$$

$$\Leftrightarrow 0 = -C_k^0 + C_k^1 - \dots \pm C_k^k = (1-1)^k$$

ex3: $X = \sum_{x \in \Omega} x \cdot \mathbb{1}_x$

Soit $\omega \in \Omega$, posons $x_0 = X(\omega)$.

$$\mathbb{1}_{(X=x)}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } X(\omega) = x \text{ ie si } x = x_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

donc $\sum_{x \in \Omega} x \mathbb{1}_{(X=x)}(\omega) = x_0 \mathbb{1}_{(X=x_0)}(\omega) = x_0 = X(\omega)$

Contre-exemple sur les lois de couple

$$\Omega = [1,6]^2$$

$$X_1: (i,j) \mapsto i$$

$$X_2: (i,j) \mapsto j$$

Premier modèle : équiprobable $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$

$$\forall i_0 \in [1,6] \quad \pi_{X_2}(i_0) = \frac{1}{6} \quad \forall i_0 \in [1,6] \quad \pi_{X_2}(i_0) = \frac{1}{6}$$

$$\pi_{(X_1, X_2)}(1,2) = \frac{1}{36}$$

Deuxième modèle : $p(i,j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{6} & \text{si } i = j \end{cases}$ $\pi_{X_1}(i_0) = \frac{1}{6}$
 $\pi_{X_2}(i_0) = \frac{1}{6}$
 $\pi_{(X_1, X_2)}(1,2) = 0$

Indépendance

A, B indépendants si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$

Remarque : en général, deux événements indépendants dans la réalité vont être modélisés comme des événements indépendants au sens de la théorie des probas

Mais certains événements indépendants en probas ne sont pas du tout indépendants dans la réalité.

→ Une famille de n événements $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ est indépendante ssi $p(\bigcap A_i) = \prod p(A_i)$

exple : (A_1, A_2, A_3) est indépendante ssi

$$\begin{aligned} p(A_1 \cap A_2) &= p(A_1)p(A_2) \\ p(A_1 \cap A_3) &= p(A_1)p(A_3) \\ p(A_2 \cap A_3) &= p(A_2)p(A_3) \\ p(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= p(A_1)p(A_2)p(A_3) \end{aligned}$$

→ Deux classes $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ d'événements sont dites indépendantes ssi $\forall i \in [1, n] \quad \forall j \in [1, m] \quad A_i$ et B_j st indépendants.

→ Une variable X et une classe $(A_1, \dots, A_n)$ sont dites indépendantes quand $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ et la classe des événements de la forme $X=k$ sont indépendantes.

→ Deux variables X, Y st indépend si les classes $\{X=k \mid k \in X(\Omega)\}$ et $\{Y=k \mid k \in Y(\Omega)\}$ st indép, ie lorsque, $\forall k \in X(\Omega)$ et $\forall j \in Y(\Omega)$

$$p(X=k \text{ et } Y=j) = p(X=k) \cdot p(Y=j)$$

→ Une suite de variables $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est indépendante si
 $\forall i, \forall k \in X_i(\Omega) \quad P(X_1=k_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n=k_n) = \prod P(X_i=k_i)$.

Propriétés

→ Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des fct
 alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont indép.

→ Si X, Y indépendants, $p(X=x \text{ et } Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$.
 $= p((X, Y) = (x, y)) \quad \pi_X(x) \cdot \pi_Y(y)$.
 $= \pi_{X,Y}(x, y)$

→ En particulier, soit X une variable de loi donnée, alors
 prenons $\Omega' = (X(\Omega))^2$ loi de probabilité $(i, j) \rightarrow \pi_X(i) \cdot \pi_Y(j)$

II. Espérance et indépendance

• Si X et Y sont indépendants $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned} \text{Verif : } E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x,y \pi_{X,Y}(x,y) = \sum x,y \pi_X(x) \pi_Y(y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \pi_X(x) \sum_{y \in Y(\Omega)} y \pi_Y(y) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

• $V(X) = \sigma_X^2$

$$\begin{aligned} V(X) &= \text{moyenne des carrés des écarts à la moyenne} \\ &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Si X et Y sont indépendants, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$