

→ Une suite de variables $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est indépendante si
 $\forall i, \forall k \in X_i(\Omega) \quad P(X_1=k_1 \text{ et } \dots \text{ et } X_n=k_n) = \prod P(X_i=k_i)$.

Propriétés

→ Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont indépendantes et $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont des fct
 alors $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ sont indép.

→ Si X, Y indépendants, $p(X=x \text{ et } Y=y) = p(X=x)p(Y=y)$.
 $= p((X, Y) = (x, y)) \quad \pi_X(x) \cdot \pi_Y(y)$.
 $= \pi_{X,Y}(x, y)$

→ En particulier, soit X une variable de loi donnée, alors
 prenons $\Omega' = (X(\Omega))^2$ loi de probabilité $(i, j) \rightarrow \pi_X(i) \cdot \pi_Y(j)$

II. Espérance et indépendance

• Si X et Y sont indépendants $E(XY) = E(X)E(Y)$

$$\begin{aligned} \text{Verif : } E(XY) &= \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} x, y \pi_{X,Y}(x, y) = \sum x y \pi_X(x) \pi_Y(y) \\ &= \sum_{x \in X(\Omega)} x \pi_X(x) \sum_{y \in Y(\Omega)} y \pi_Y(y) \\ &= E(X) E(Y) \end{aligned}$$

• $V(X) = \sigma_X^2$

$$\begin{aligned} V(X) &= \text{moyenne des carrés des écarts à la moyenne} \\ &= E((X - E(X))^2) \\ &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\ &= E(X^2) - E(X)^2 \end{aligned}$$

Si X et Y sont indépendants, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

exercice p. 8

$$\sum_k \frac{C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^q} = 1.$$

 $\Leftrightarrow$

$$\sum_k C_p^k C_{n-p}^{q-k} = C_n^q$$

$\rightarrow$ « choisir q éléments parmi n »
 $\Leftrightarrow$ « choisir un $0 \leq k \leq p$, puis
 choisir k éléments dans B , puis
 choisir $(q-k)$ dans C .

Soit A un cardinal $A = B \cup C$ card $B = p$ card $C = n-p$

$$a) (1+x)^p (1+x)^{n-p} = (1+x)^n$$

$$\sum_{k=0}^p C_p^k x^k \sum_{l=0}^{n-p} C_{n-p}^l x^l = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j$$

$$\sum_{k=0}^p C_p^k C_{n-p}^{j-k} x^k x^{j-k} = C_n^j x^j$$

$$\sum_{k=0}^p \frac{C_p^k C_{n-p}^{j-k}}{C_n^j} = 1$$

$$b) \text{ si } p \leq q \quad p(F \subset G) = p(\text{card}(F \cap G) = p) = H(p, p, q, n)$$

$$= \frac{C_p^0 C_{n-p}^{q-p}}{C_n^q} = \frac{C_{n-p}^{q-p}}{C_n^q}$$

$$p(F \cap G = \emptyset) = \frac{C_p^0 C_{n-p}^{q-0}}{C_n^q} = \frac{C_{n-p}^q}{C_n^q}$$

$$\text{card} \langle F \subset G \rangle = C_n^q C_q^p$$

$$p(F \subset G) = \frac{C_n^q C_q^p}{C_n^q C_n^p} = \frac{C_q^p}{C_n^p}$$

$$\text{normalement } \frac{C_q^p}{C_n^p} \stackrel{?}{=} \frac{C_{n-p}^{q-p}}{C_n^q}$$

$$C_q^p C_n^q \stackrel{?}{=} C_{n-p}^{q-p} C_n^p$$

$$\frac{q!}{p!(q-p)!} \frac{n!}{q!(n-q)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{(n-p)! q!}{(q-p)! q!(n-q)!}$$

$$c) \Omega = \{A \subset [0,49] \mid \text{card } A = 6\}$$

$$= \frac{\text{cas favorable}}{\text{cas possible}} = \frac{C_6^k C_{44}^{6-k}}{C_{50}^6}$$

Exercices p. 9. (poly).

$$1.) Z \sim B(n, p) \quad V(Z) = E(Z^2) - \underbrace{(E(Z))^2}_{np}$$

$$E(Z^2) = \sum k^2 p(Z=k)$$

$$= \sum_k k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$(\text{si } p = \frac{1}{2}, \quad \sum k^2 C_n^k \quad ?)$$

$$\sum C_n^k = 2^n.$$

$$k C_n^k = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n C_{n-1}^{k-1}$$

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1} = \text{card} \left\{ (x, A) \mid \begin{array}{l} x \in E \\ A \subseteq E, \text{ card } A = k-1, x \notin A \end{array} \right\}$$

où card $E = n$

$$C_n^{i+j} C_{n-i}^j = C_n^i C_{n-i}^j = \text{card} \left\{ (A, B), \begin{array}{l} A \subseteq E \quad A \cap B = \emptyset \\ B \subseteq E \quad \text{card } A = i \\ \text{card } B = j \end{array} \right\}$$

$$\text{pour } i=2, \quad C_n^{j+2} C_{n-j-2}^j = C_n^2 C_{n-2}^j$$

$$j+2=k \quad C_{j+2}^2 = C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k^2-k}{2}$$

$$\left(\frac{k^2-k}{2} \right) C_n^k = \frac{n^2-n}{2} C_{n-2}^{k-2}$$

$$k^2 C_n^k = (n^2-n) C_{n-2}^{k-2} + k C_n^k = (n^2-n) C_{n-2}^{k-2} + n C_{n-1}^{k-1}$$

$$V(Z) = \sum_{k=1}^n k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^n ((n^2-n) C_{n-2}^{k-2} + n C_{n-1}^{k-1}) p^k (1-p)^{n-k} \quad \swarrow \text{pail prof}$$

$$= (n^2-n) p^2 \underbrace{\sum C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}}_{(p+1-p)^{n-2}} + np \underbrace{\sum C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}}_{(p+1-p)^{n-1}}$$

$$= np(1-p) + n^2 p^2$$

$$E(Z^2) - E(Z)^2 = np(1-p) + n^2 p^2 - n^2 p^2$$

$$= \underline{np(1-p)}$$

$$X \rightsquigarrow \mathcal{H}(n, p, q)$$

$$E(X) = \sum k \frac{\binom{p}{k} \binom{q-k}{n-p}}{\binom{q}{n}} = \frac{p}{\binom{q}{n}} \sum \binom{k-1}{p-1} \binom{q-k}{n-p}$$

$$= \frac{p}{\binom{q}{n}} \sum \binom{k-1}{p-1} \binom{q-1-(k-1)}{n-1-(p-1)} = \frac{p}{\binom{q}{n}} \binom{q-1}{n-1}$$

$$= \frac{p q! (n-q)! (n-1)!}{n! (q-1)! (n-1-(q-1))!} = \frac{pq}{n}$$

Conditionnement

exemple: $\Omega_1 = \{BB, BN, NN\}$ $p(BB) = p(BN) = p(NN) = \frac{1}{3}$

$\Omega_2 = \{BB, BN\}$

possibilités: { a) si le gars en fait exprès de montrer une face noire quand il a le choix, $p(BN) = 0$ donc le modèle Ω_2 n'est pas équiprobable

b) s'il choisit l'une des deux faces au hasard

$\Omega_1 = \{ \underset{1/6}{BB}, \underset{1/6}{BB}, \underset{1/6}{BN}, \underset{1/6}{BN}, \underset{1/6}{NN}, \underset{1/6}{NN} \}$

$\Omega_2 = \{ \underset{1/3}{BB}, \underset{1/3}{BB}, \underset{1/3}{BN} \}$

$p_2(\{BB, BB\}) = 2/3$

c) s'il fait exprès de montrer une face blanche qd il a le choix

$p_2(\{BB, BB\}) = \frac{1}{2}$

B = «carte blanche des deux côtés»

C = «le gars m'a montré une face blanche»

$p(B|C)$? $p(C)$?

a) $C = \{BB\}$ $p(BB|C) = \frac{1/3}{1/3} = 1$

b) $p(C) = \frac{1}{2}$ $p(B|C) = \frac{1/3}{1/2} = 2/3$

c) $\Omega_1 = \{BB, BB, BN, BN, NN, NN\}$

$C = \{BN, BB, BB, BN\}$ $p(\{BB, BB\}|C) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}$

Probabilité conditionnelle

Définition: $p(B|C) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)} = \ll \text{proba de B sachant C} \gg$

$$p(C|C) = 1$$

$$p(\emptyset|C) = 0$$

$$p(A \cup B | C) = p(A|C) + p(B|C)$$

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X.

$\ll \text{sachant C} \gg$

$$\pi_{X|C}(i) = p(X=i|C) = \frac{p(X=i \cap C)}{p(C)}$$

Espérance conditionnelle d'une variable numérique X.

$\ll \text{sachant C} \gg$

$$E(X|C) = \frac{E(X \mathbb{1}_C)}{p(C)}$$

Soit une suite de variables de Bernoulli indépendante $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ alors } Z_n \sim B(n, p)$$

$$p(Z_p = k | Z_n = q) ? \quad E(Z_p | Z_n = q) ?$$

$$p < n \quad p(Z_p = k | Z_n = q) = \frac{p(Z_p = k \cap Z_n = q)}{p(Z_n = q)}$$

$$\text{OR } Z_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_p) + X_{p+1} + \dots + X_n = Z_p + \overset{R_p}{(X_{p+1} + \dots + X_n)}$$

$$= \frac{p(Z_p = k \cap Z_p + R_p = q)}{p(Z_n = q)} = \frac{p(Z_p = k \cap R_p = q - k)}{p(Z_n = q)}$$

$$= \frac{p(Z_p = k \cap R_p = q - k)}{p(Z_n = q)} \quad \text{OR } Z_p, R_p \text{ st indep.}$$

$$= \frac{p(Z_p = k) p(R_p = q - k)}{p(Z_n = q)}$$

OR $R_p = X_{p+1} + \dots + X_n \rightarrow$ a donc la probabilité que Z_{n-p}

$$= \frac{p(Z_p = k) p(Z_{n-p} = q - k)}{p(Z_n = q)}$$

$$= \frac{\binom{n}{p} \alpha^k (1-\alpha)^{p-k} \binom{n-p}{n-p} \alpha^{q-k} (1-\alpha)^{n-p-(q-k)}}{\binom{n}{n} \alpha^q (1-\alpha)^{n-q}}$$

$$p(Z_p = k | Z_n = q) = \frac{C_p^k C_{n-p}^{q-k}}{C_n^q} = H(k, p, q, n).$$

22/11/2010.

Exercice p. 16

- 3) la proba qu'on choisit la voiture = $1/3 \rightarrow$ on change pas
la proba qu'on choisit un cochon = $2/3 \rightarrow$ on change on gagne
 $\Rightarrow$ plus de proba si on change de porte designée au départ.

$p(\text{la voiture soit derriere la porte restante} \mid \text{présentateur a trouvé un chèvre})?$

$$\Omega = \{CCV, CVC, VCC\}$$

porte restante
porte ouverte par présentateur
porte choisie au départ

$$p(VCC) = 1/3.$$

$$p(CVC) = 0.$$

$$p(\{CCV, CVC\}) = 2/3 \text{ or } p(CVC) = 0 \Rightarrow p(CC V) = 2/3$$

$$p(\text{chèvre derriere la porte du présentateur}) = 1.$$

$$p(\text{chèvre derriere la porte initiale } \overset{A}{\text{choisie}} \mid \text{chèvre derriere celle du présentateur } \overset{B}{\text{choisie}}) = ?$$

$$p(\text{voiture derriere la porte initiale } \overset{B}{\text{choisie}}) = 1/3$$

$$p(\text{chèvre derriere la porte du présentateur } \overset{B}{\text{choisie}} \mid \text{chèvre derriere celle initiale } \overset{A}{\text{choisie}}) = 1.$$

OR

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B|A)p(A) + p(B|\bar{A})p(\bar{A})}$$

$$= \frac{p(B \cap A)}{p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})}.$$

Formule de Bayes $\rightarrow$

complément de A

$$p(A|B) = \frac{1 \times 2/3}{1 \times 2/3 + 1 \times 1/3} = 2/3.$$

Exercice 2 p. 14

$$\text{prévalence} = \frac{1000}{1000000} = \frac{1}{1000}.$$

$$= p(\text{un individu pris au hasard soit malade})$$

$$\text{sensibilité} = p(\text{test positif} \mid \text{individu malade}) = 0,9.$$

$$\text{spécificité} = p(\text{test négatif} \mid \text{individu pas malade}) = 0,9.$$

$$p(\text{individu malade} \mid \text{test positif}) = \frac{0,9 \times 0,001}{0,9 \times 0,001 + 0,1 \times 0,999} = \frac{1}{112}.$$

Définition: Soit X, Z deux variables aléatoires, pour tout $i \in Z(\Omega)$

$$\text{soit } \varphi : i \mapsto E(X | Z = i).$$

$$\varphi \circ Z : \omega \mapsto \varphi(Z(\omega)).$$

est une variable aléatoire qu'on appelle espérance conditionnelle de X sachant Z et qu'on note $E(X | Z)$.

exemple: si X_n est le prix d'un actif à l'instant n et qu'ajd, la date est n , Alors X_{n+1} est aléatoire et X_{n+2} aussi.

$E(X_{n+2}) \rightarrow$ valeur moyenne du prix après demain

$E(X_{n+2} | X_{n+1}) \rightarrow$ valeur moyenne du prix après demain en fct de la valeur du prix demain.

Propriétés

1. $E(X | Z)$ est l'unique variable aléatoire Y vérifiant les 2 conditions suivantes:

(i) Y est fonction de Z

(ii) pour toute fct $\psi(z)$, on a $E(X\psi(z)) = E(Y\psi(z))$.

vérifions (ii): $E(Y\psi(z)) = E(E(X | Z) \psi(z))$

$$= E(\psi(z) \psi(z))$$

$$= \sum_{z \in Z(\Omega)} \psi(z) \psi(z) p(Z=z)$$

$$= \sum E(X \cdot 1_{Z=z} \psi(z)) = E(X \sum 1_{Z=z} \psi(z))$$

$$= E(X \psi(z))$$

2. Linéarité $E(aX + bY | Z) = aE(X | Z) + bE(Y | Z)$

3. positivité, si $X \geq 0$, $E(X | Z) \geq 0$

4. $E(E(X | Z)) = E(X)$ ($\rightarrow$ calcul d'une moyenne en faisant une répartition par classe)

5. $E(X \psi(z) | Z) = \psi(z) E(X | Z)$

6. Plus généralement, si $h(x, z)$ est une fct de X et de Z .

$$K : (\omega, z) \mapsto E(h(X, z) | Z)(\omega)$$

$$\text{alors } E(h(X, z) | Z)(\omega) = K(\omega, Z(\omega))$$

(5 est cas particulière de 6 en prenant $h(X, z) = X \psi(z)$)

Vérification du point 6 :

$$\forall i, j \text{ posons } u(i, j) = E(h(X, i) | Z = j)$$

$$\text{Alors } u(i, i) = E(h(X, i) | Z = i) = E(h(X, Z) | Z = i)$$

$$\text{Or } K(\omega, i) = E(h(X, i) | Z = Z(\omega)) = u(i, Z(\omega))$$

$$\text{donc } K(\omega, Z(\omega)) = u(Z(\omega), Z(\omega)) = E(h(X, Z) | Z = Z(\omega))$$

Exercice 22.4 p. 20.

card $\Omega = n$.

variable aléatoire X

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

$\{ \text{variables aléatoires} \} = V$

$$\| \cdot \|_W$$

$$X \mapsto E(X)$$

$$E(XY)$$

vecteur des valeurs de X .

espace vectoriel de dimension n

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-ième ligne}$$

endomorphisme.

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ X(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix} \xrightarrow{\pi} \begin{pmatrix} E(X) \\ E(X) \\ E(X) \end{pmatrix}$$

π est un endomorphisme car

$$\pi(aX + bY) = a\pi(X) + b\pi(Y)$$

C'est un projecteur orthogonal de V dans le sous-espace vectoriel W des variables constantes.

$$\pi \circ \pi = \pi$$

$$\text{Ker } \pi \perp W$$

produit scalaire des vecteurs $\begin{pmatrix} \vdots \\ X(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \vdots \\ Y(\omega) \\ \vdots \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ concept d'orthogonalité, norme

$$\sqrt{E(X^2)} = \ll \text{norme de la variable aléatoire } X \gg$$

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} = \sqrt{E((X - E(X))^2)}$$

$$= \ll \text{norme du vecteur } X - E(X) \gg$$

= distance de X au sous-espace vectoriel W .

Z variable à p valeurs distincts, card $Z(\Omega) = p$.

$$V_Z = \{ \text{fonctions déterministes de } Z \} \subset V.$$

$$\dim V_Z = p \leq n.$$

$$X \mapsto E(X|Z)$$

$$V_1 \mapsto V_Z$$

est un endomorphisme.
C'est une projection orthogonale.

$$X \mapsto R(X|Z) = E(X) + \frac{\text{cov}(X, Z)}{V(Z)} (Z - E(Z)) \quad \begin{array}{l} * \text{covariance} = \text{cov} \\ * \text{variance} = V. \end{array}$$

$$V \mapsto \{ aZ + b \mid a, b \in \mathbb{R} \} \subset V_Z \quad \text{endomorphisme, projection orthog.}$$

$$E((X - R(X|Z))^2)$$

$R(X|Z)$ est la fct affine de Z la plus proche de X .

Algèbres et partitions

Exemple de partition de Ω : soit X une variable aléatoire.

$$\Omega = \bigsqcup_{i \in X(\Omega)} (X=i) \quad \text{réunion disjointe.}$$

Remarque : $E(X|Z)$ ne dépend pas des valeurs de Z , elle ne dépend que du découpage de Ω en une partition.

$$\Omega = \bigsqcup (Z=i)$$

En particulier, $E(X|Z+36) = E(X|Z)$ car Z et $Z+36$ engendrent une même partition de Ω .

Attention, Z et Z^2 n'engendrent pas la même partition.

$$(Z^2=1) = (Z=1) \cup (Z=-1)$$

La partition engendrée par Z est « plus fine » que celle engendrée par Z^2 .

En pratique, on s'intéresse plutôt à l'« algèbre » engendrée par une partition.

Soit $\mathcal{P}$ une partition de Ω (ie $\Omega = \bigsqcup_{A \in \mathcal{P}} A$)

On définit l'algèbre $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ engendrée par $\mathcal{P}$

$$\mathcal{F}(\mathcal{P}) = \{ A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \mid (\forall i) A_i \in \mathcal{P}, n \in \mathbb{N} \}.$$

Propriétés de $\mathcal{F}(P)$:

- $\emptyset \in \mathcal{F}(P)$
- $\Omega \in \mathcal{F}(P)$
- $\forall A, B \in \mathcal{F}(P) \quad A \cup B \in \mathcal{F}(P)$
- $\forall A \in \mathcal{P}, A \in \mathcal{F}(P) \quad A \cap B \in \mathcal{F}(P)$
les atomes

Si P est plus fine que P' , on dit que $\mathcal{F}(P)$ est plus fine que $\mathcal{F}(P')$ et dans ce cas $\mathcal{F}(P) \subset \mathcal{F}(P')$.

exemple : si $X_1, X_2, \dots, X_n$ est une suite de v.a. sur Ω , on considère :

$\forall p \leq n$, soit $\mathcal{F}_p$ l'algèbre engendrée par la variable $(X_1, X_2, \dots, X_p)$.

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \dots \subset \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$$

Définition : une v.a. X est dite $\mathcal{F}$ -mesurable lorsqu'elle est constante sur les atomes de $\mathcal{F}$.

Remarque : soient $A_1, A_2, \dots, A_N$ les atomes de $\mathcal{F}$.
Quand $\omega \in A_i \quad X(\omega) = a_i$.

$$X = \sum_{i=1}^N a_i 1_{A_i}$$

Exercice 2.1.4 p. 16.

Deux dés $X_1, X_2 \in [1, 6] \quad S = X_1 + X_2 \in [2, 12]$

loi de X_1 sachant $S = q$?

$$E(X_1 | S = q) = ? \quad \frac{q}{2}$$

$$E(X_1 | S) = ?$$

$$\begin{aligned} p(X_1 = k | S = q) &= \frac{p(X_1 = k \cap S = q)}{p(S = q)} = \frac{p(X_1 = k \text{ et } X_1 + X_2 = q)}{p(S = q)} \\ &= \frac{p(X_1 = k \text{ et } X_2 = q - k)}{p(S = q)} = \frac{p(X_1 = k) p(X_2 = q - k)}{p(S = q)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \leq q - k \leq 6 \\ q - 1 \geq k \geq q - 6 \end{aligned} \quad = \quad \frac{\frac{1}{6} \times 1/6}{p(S = q)} \quad \begin{array}{l} \text{si } k \in [q-6, q-1] \\ \text{sinon } 0. \end{array}$$

exemple pour $q = 5$. $[5-6, 5-1] \cap [1, 6] = [1, 4]$.

$$p(X_1 = k | S = 5) = \frac{1}{4} \quad \text{pour tout } k \in [1, 4]$$

$$\frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{36} \times \frac{36}{4} = \frac{1}{4}$$

$$q=2: [2-6, 2-1] \cap [1, 6] = [1, 1]$$

$$p(X_1=k | S=2) = 1 \quad \text{pour tout } k \in [1, 1]$$

$$\text{De même : } p(X_1=k | S=3) = \frac{1}{2}$$

$$p(X_1=k | S=4) = \frac{1}{3}$$

$$p(X_1=k | S=5) = \frac{1}{4}$$

$$p(X_1=k | S=6) = \frac{1}{5}$$

$$p(X_1=k | S=7) = \frac{1}{6}$$

$$p(X_1=k | S=8) = \frac{1}{5}$$

$$p(X_1=k | S=9) = \frac{1}{4}$$

$$p(X_1=k | S=10) = \frac{1}{3}$$

$$p(X_1=k | S=11) = \frac{1}{2}$$

$$p(X_1=k | S=12) = 1$$

→ loi uniforme

$$k \mapsto p(X_1=k | S=q) = \pi_{X_1}(k | S=q)$$

$$E(X_1 | S=q) = \frac{E(X_1 | S=q)}{p(S=q)} = \sum_k k \pi_{X_1}(k | S=q) = \frac{3+4+5+6}{4} = 4,5$$

$$E(X_1 | S=q) = E(X_1 | X_1 + X_2 = q) = E(X_2 | X_1 + X_2 = q)$$

$$E(X_1 | X_1 + X_2 = q) + E(X_2 | X_1 + X_2 = q) = E(X_1 + X_2 | X_1 + X_2 = q) = q$$

$$\text{donc } E(X_1 | X_1 + X_2 = q) = \frac{q}{2}$$

ou →

$$\pi_{X_1 | S=q}(k) = \begin{cases} \frac{1}{N} & \text{si } k \in [q-6, q-1] \cap [1, 6] \text{ où } N = \text{card}([q-6, q-1] \cap [1, 6]) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{si } q \leq 7 \quad q-1 \leq 6 \quad N = q-1 \text{ et } [q-6, q-1] \cap [1, 6] = [1, q-1]$$

$$\text{si } q > 7 \quad q-1 > 6 \text{ et } [q-6, q-1] \cap [1, 6] = [q-6, 6]$$

$$N = 13 - q \quad \text{car } 6 - (q-6-1) = 13 - q \quad \text{car } \text{card}[a, b] = b - (a-1)$$

$$\pi_{X_1 | S=q}(k) = \begin{cases} \frac{1}{q-1} & \text{si } q \leq 7 \text{ et } k \in [1, q-1] \\ \frac{1}{13-q} & \text{si } q > 7 \text{ et } k \in [q-6, 6] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 2.1.6. p. 17

$$E(X|Y) = E(X).$$

$$\begin{aligned} E(S|X_1+X_2) &= E(X_1+X_2+(X_3+X_4+\dots+X_6)|X_1+X_2) \\ &= X_1+X_2 + E(X_3+X_4+\dots+X_6|X_1+X_2) \\ &= X_1+X_2 + E(X_3+X_4+\dots+X_6) \\ &= X_1+X_2 + 6E(X_3) = 21/6 = 3,5 = \frac{7}{2} \\ &= X_1+X_2 + 21. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.7. p. 17.

$$X_1, X_2, X_3 \quad \mu = \pi_{X_3}$$

$$S = X_1 + X_2 + X_3.$$

$$\pi_{S|(X_1, X_2)}(k)$$

$$E(S|(X_1, X_2)) ?$$

$$\begin{aligned} p(S=k | X_1=i, X_2=j) &= p(i+j+X_3=k | X_1=i \text{ et } X_2=j) \\ &= p(X_3=k-i-j | X_1=i \text{ et } X_2=j) \\ &= p(X_3=k-i-j) \\ &= \mu(k-i-j). \end{aligned}$$

$$\pi_{S|(X_1, X_2)}(k) = \mu(k - X_1 - X_2).$$

$$\begin{aligned} E(X_1+X_2+X_3 | (X_1, X_2)) &= X_1+X_2 + E(X_3 | (X_1, X_2)) \\ &= \underline{X_1+X_2 + E(X_3)} \end{aligned}$$

Exercice 2.1.8 p. 17

si X indépendante de B $E(X|B) = E(X)$.

- soit X ne prenant que deux valeurs a, b .

$$\Omega = (X=a) \cup (X=b)$$

$$\text{On suppose } E(X|B) = E(X) = ap(X=a) + bp(X=b).$$

$$E(X|B) = \frac{E(X|B)}{p(B)}$$

$$E(X|B) = ?$$

$$p(X|B=a) = p(X=a \cap B).$$

$$p(X|B=b) = 1 - p(B)$$

$$p(X|B=b) = p(X=b \cap B).$$

$$1/2 - 21$$

donc $\underbrace{ap(X=a \cap B) + b p(X=b \cap B)}_{E(X|B)} = p(B)(ap(X=a) + bp(X=b))$

$$a(\underbrace{p(X=a \cap B)}_{p(B)} - \underbrace{p(B)p(X=a)}_1) + b(\underbrace{p(X=b \cap B)}_{p(B)} - \underbrace{p(B)p(X=b)}_1) = 0$$

$$\Rightarrow p(X=a \cap B) - p(B)p(X=a) + p(X=b \cap B) - p(B)p(X=b) = 0$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + b(0-x) = ax - bx \Rightarrow x(a-b) = 0 \\ a-b=0 \text{ or } a \geq 0, b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0$$

Contre-exemple à trouver

Définition : Soit une algèbre $\mathcal{F}$

Une variable X est dite $\mathcal{F}$ -mesurable si elle est constante sur les atomes.

Remarque : si $\mathcal{F}$ est l'algèbre engendrée par Z , les variables $\mathcal{F}$ -mesurables sont les fonctions déterministes de Z

Supposons que $\mathcal{F}$ est engendrée par une partition $\mathcal{P}$

on définit
$$E(X|\mathcal{F}) = \sum_{B \in \mathcal{P}} E(X|B) 1_B$$

Remarque : si $\mathcal{F}$ est l'algèbre $\mathcal{F}(Z)$ engendrée par Z , on a

$$E(X|\mathcal{F}) = E(X|Z)$$

Propriétés :

1. $E(X|\mathcal{F})$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{F}$ -mesurable Y telle que pour toute variable Z $\mathcal{F}$ -mesurable on ait $E(YZ|\mathcal{F}) = E(XZ|\mathcal{F})$.

2. Linéarité. $E(aX + bY|\mathcal{F}) = aE(X|\mathcal{F}) + bE(Y|\mathcal{F})$.

3. Positivité : si $X \geq 0$, alors $E(X|\mathcal{F}) \geq 0$.

4. Convexité : si u est une fonction convexe

$$u(E(X|\mathcal{F})) \leq E(u(X)|\mathcal{F})$$

5. si $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$.

$$E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G})$$

$$E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{F}) = E(X|\mathcal{G}) !$$

d'où la notation : $E(X|\mathcal{F}|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{F})|\mathcal{G})$.

Exemple: $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ $\mathcal{F}_{n+1} \supset \mathcal{F}_n$

$$\text{si } p \supset q \quad E(Z | \mathcal{F}_p | \mathcal{F}_q) = E(Z | \mathcal{F}_q)$$

6. si Y est $\mathcal{F}$ -mesurable alors $E(XY | \mathcal{F}) = Y E(X | \mathcal{F})$

7. Plus généralement, si $h(X, Y)$ est une fonction de deux variables aléatoires dont l'une, Y , est $\mathcal{F}$ -mesurable, est $\mathcal{F}$ -mesurable,

$$\text{soit } K(\omega, y) = E(h(X, y) | \mathcal{F})(\omega).$$

$$\text{alors } K(\omega, Y(\omega)) = E(h(X, Y) | \mathcal{F})(\omega).$$

$\Rightarrow$ résumé $\Rightarrow$ pour calculer $E(h(X, Y) | \mathcal{F})(\omega)$, on calcule d'abord $Y(\omega)$ puis $E(h(X, Y(\omega)) | \mathcal{F})(\omega) \Rightarrow$

8. Si X est indépendante de $\mathcal{F}$. (ie que tout i et tout atome B de $\mathcal{F}$,
on doit avoir $p(X=i \cap B) = p(X=i) p(B)$) $E(X | \mathcal{F}) = E(X)$

Définition: loi de X sachant $\mathcal{F}$

Remarque: $p(X=k) = E(1_{X=k})$.

On définit la loi de X sachant $\mathcal{F}$ par analogie

$$\pi_{X|\mathcal{F}}(k) = E(1_{X=k} | \mathcal{F}).$$

conséquence: sur l'atome B , $\pi_{X|\mathcal{F}}(k)(\omega) = p(X=k | B)$.

Remarque: si X et Z sont indépendantes, $E(X | \mathcal{F}(Z)) = E(X)$

Mais la réciproque est fautive. Cependant on peut dire que: X et $\mathcal{F}$ est indép.

$$\Leftrightarrow \pi_{X|\mathcal{F}} = \pi_X$$

Chaîne de Markov.

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) toutes à valeurs dans un ensemble fini I appelé « espace des états ».

X_i est l'état à l'instant i

$$\text{si } p(X_{i+1}=k | X_i, X_{i-1}, \dots, X_0) = p(X_{i+1}=k | X_i)$$

on dit que la suite $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov.

Si les $p(X_{k+1}=j | X_k=i)$ sont indépendantes de k , on dit que c'est une chaîne de Markov homogène.

Dans ce cas, l'évolution du processus se résume à la connaissance d'une « matrice stochastique ».

$$Q = \begin{pmatrix} p(X_{k+1}=j | X_k=i) & \dots \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{jème ligne} \\ \uparrow \\ \text{jème colonne} \end{matrix}$$

$$\sum_j Q_{ij} = 1 \quad (\forall i) \quad \forall i, j, \quad Q_{ij} \in [0, 1]$$

* multiplication à droite par un vecteur colonne.

$$f = [f(1), \dots, f(q)]$$

la matrice est une matrice carrée $Q \in M_{q \times q}$.

soit un vecteur $\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(q) \end{pmatrix}$

$$Q \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ \vdots \\ f(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j f(j) p(X_{k+1}=j | X_k=i) \end{pmatrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{jème ligne} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E(f(X_{k+1}) | X_k=i) \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } E(f(X_{k+1}) | X_k) = Q f$$

Exercice 1 « Téléphone arabe ».

Une suite d'individus. L'individu k transmet à l'individu $(k+1)$.

l'information que lui transmise l'individu $(k-1)$ avec une proba p .

et il transmet l'information contraire avec la proba $(1-p)$.

question: pour n grand, p (l'individu dit vrai)

espace d'état: {vrai, faux}

Exercice 2.

2 urnes avec d boules. À chaque instant, on tire une des boules au hasard et on le change d'urne.

X_k = nombre de boules à l'instant k dans la première urne.
espace d'état : $\{1, d\}$

Exercice 3.

Suite de paris. On mise toujours $1€$. À chaque jeu, on gagne la mise avec probabilité p , on la perd avec proba $1-p$.

espace d'états : dépendent de la durée du jeu $[-N, N]$ N no de jeux