

- Si f est convexe, si (M_n) est martingale

$$E(f(M_{k+1}) | \mathcal{F}_k) \geq f(E(M_{k+1}) | \mathcal{F}_k) = f(M_k)$$

alors $f(M_n)$ est sous-martingale.

- $E(M_{n+p} | \mathcal{F}_n) = M_n$ si M est une martingale.

$$\begin{aligned} \text{CAR } E(M_{n+p} | \mathcal{F}_p) &= E(E(M_{n+p} | \mathcal{F}_{n+p-1}) | \mathcal{F}_p) \\ &= E(M_{n+p-1} | \mathcal{F}_p) = \dots \\ &= E(M_{p+1} | \mathcal{F}_p) = M_p. \end{aligned}$$

- Si M martingale, $E(M_n) = E(M_0)$.
 $\parallel$
 $(E(E(M_n | \mathcal{F}_0))) =$

Exemple : si $M_n = X_0 X_1 \dots X_n$, où les X_n sont indépendantes et d'espérance 1

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) &= E(M_n X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \\ &= M_n E(X_{n+1}) = M_n. \end{aligned}$$

- Transformées de martingales.

Soit (M_n) une suite adaptée à $\mathcal{F}_n$. Et (U_n) une suite prévisible.

$$M_0 + \sum U_{n+1}(M_{n+1} - M_n) = (U * M)_{n+1}$$

$$(U * M)_{n+1} = (U * M)_n + U_{n+1}(M_{n+1} - M_n)$$

⊗

Théorème :

Si (M_n) est une martingale et (U_n) prévisible, alors $U * M$ est martingale.

Si (M_n) est une sous-martingale et (U_n) prévisible toujours positive, alors $U * M$ est une sous-martingale.

Si (M_n) est une sur-martingale et (U_n) prévisible toujours positive, alors $U * M$ est une sur-martingale.

Vérification :

$$\begin{aligned} E((U * M)_{n+1} - (U * M)_n | \mathcal{F}_n) &= E(U_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n) \\ &= U_{n+1} E(M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

⊗ notation du cours (poly) :

$$\Delta(U * M)_{n+1} = U_{n+1} \Delta M_{n+1}$$

Si on autorisait que U_n ne soit pas prévisible, mais seulement adaptée

$$U_{n+1} = 10000 \mathbb{1}_{M_{n+1} - M_n = 1} - 10000 \mathbb{1}_{M_{n+1} - M_n = -1}$$

$$U_{n+1} \Delta M_{n+1} = 10000 : \text{ sous-martingale.}$$

14/12/2010

• Temps d'arrêt

Soit un espace filtré et une suite adaptée $X_0, X_1, \dots, X_n$
soit T variable aléatoire $T: \Omega \rightarrow [0, N]$

$$X_T: \omega \mapsto X_T(\omega)(\omega)$$

On peut définir une nouvelle suite:

$$X_n^T = X_n \mathbb{1}_{n \leq T} + X_T \mathbb{1}_{n > T}$$

on l'appelle « suite X_n arrêtée en T »

On remarque que $X_n^T = (U * X)_n$ si l'on prend $U_n = \mathbb{1}_{n \leq T}$.

$$X_{n+1}^T - X_n^T = \underbrace{X_{n+1} \mathbb{1}_{n+1 \leq T} + X_T \mathbb{1}_{n+1 > T} - X_n \mathbb{1}_{n \leq T} - X_T \mathbb{1}_{n > T}}$$

$$(U * X)_{n+1} - (U * X)_n = U_{n+1} (X_{n+1} - X_n) = \mathbb{1}_{n+1 \leq T} (X_{n+1} - X_n)$$

$$\mathbb{1}_{n \leq T} = \mathbb{1}_{n+1 \leq T} + \mathbb{1}_{T=n}$$

$$\left. \begin{aligned} & \rightarrow X_{n+1} \mathbb{1}_{n+1 \leq T} + \underbrace{X_T \mathbb{1}_{n+1 > T} - X_T \mathbb{1}_{n > T}}_{=0} - X_n (\mathbb{1}_{n+1 \leq T} + \mathbb{1}_{T=n}) \\ & X_T (\mathbb{1}_{n+1 > T} - \mathbb{1}_{n > T}) = X_T \mathbb{1}_{T=n} = X_n \mathbb{1}_{T=n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_{n+1} \mathbb{1}_{n+1 \leq T} - X_n \mathbb{1}_{n+1 \leq T} = \mathbb{1}_{n+1 \leq T} (X_{n+1} - X_n)$$

Remarque:

$$\begin{aligned} (U_n) \text{ prévisible} & \Leftrightarrow U_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable } (\forall n) \\ & \Leftrightarrow \mathbb{1}_{n+1 \leq T} \text{ est constante sur les atomes de } \mathcal{F}_n (\forall n) \\ & \Leftrightarrow [n+1 \leq T] \in \mathcal{F}_n (\forall n). \end{aligned}$$

$$[n+1 \leq T] \in \mathcal{F}_n \Leftrightarrow (\forall n) [n+1 \leq T] \in \mathcal{F}_n$$

$$[n \leq T] \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$$

$$[n+1 > T] \in \mathcal{F}_n$$

$$[n \leq T] \cap [n+1 > T] = [T=n] \in \mathcal{F}_n$$

$$\Leftrightarrow [T=n] \in \mathcal{F}_n (\forall n)$$

Conséquence :

Si $(\mathcal{F}_n)$ $[T=n] \in \mathcal{F}_n$, alors on dit que T est un « temps d'arrêt ».

Dans ce cas, (U_n) est prévisible. Donc si (X_n) est $\begin{cases} \text{martingale} \\ \text{sous martingale} \\ \text{sur martingale} \end{cases}$
alors (X_n^T) est aussi une $\begin{cases} \text{martingale} \\ \text{sous martingale} \\ \text{sur martingale} \end{cases}$

• Propriété de la représentation prévisible.

Soit un espace filtré et une suite $M_0, M_1, \dots, M_n$ dont la filtration naturelle est $(\mathcal{F}_n)$.

Par exemple une marche aléatoire.

$$M_n = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n \quad \text{où la suite des } (\varepsilon_i) \text{ est indep.}$$

tous les ε_i ont la même loi
et $E(\varepsilon_i) = 0 \quad (\forall i)$.

($\mathcal{H}_i$) ε_i variable de Bernoulli.

$$\begin{aligned} \alpha &= p(\varepsilon_i = a) \\ \beta &= p(\varepsilon_i = b) \end{aligned} \quad \alpha + \beta = 1.$$

Soit (X_n) une autre suite, adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$.

Supposons que (X_n) est une martingale.

Peut-on l'écrire sous la forme $X_n = (U + M)_n$?

$$E(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) = 0.$$

$$= E(E(X_{n+1} - X_n | \varepsilon_{n+1} = a) \alpha + E(X_{n+1} - X_n | \varepsilon_{n+1} = b) \beta | \mathcal{F}_n)$$

$$= E(E(X_{n+1} | \varepsilon_{n+1} = a) \alpha - X_n \alpha + E(X_{n+1} | \varepsilon_{n+1} = b) - X_n \beta | \mathcal{F}_n)$$

Sachant $\mathcal{F}_n$:

$$X_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=a} \alpha + X_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=b} \beta - X_n = 0.$$

$$(X_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=a} - X_n) \alpha + (X_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=b} - X_n) \beta = 0.$$

de même pour (M_n) qui est aussi martingale. Donc :

$$(M_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=a} - M_n) \alpha + (M_{n+1} |_{\varepsilon_{n+1}=b} - M_n) \beta = 0.$$

$$U_{n+1} = \frac{(X_{n+1} - X_n) |_{\varepsilon_{n+1}=a}}{(M_{n+1} - M_n) |_{\varepsilon_{n+1}=a}} = \frac{(X_{n+1} - X_n) |_{\varepsilon_{n+1}=b}}{(M_{n+1} - M_n) |_{\varepsilon_{n+1}=b}}.$$

Conclusion: $X_n = (U * M)_n$.

Remarque:

Sous les mêmes hypothèses, si les ε_i ne sont pas des variables de Bernoulli (c'est-à-dire qu'elles prennent au moins 3 valeurs distinctes) alors il existe des martingales X_n qui ne sont pas de la forme $U * M$ (cf. poly).

Définition:

Quand (M_n) est telle que toute martingale adaptée à sa filtration naturelle soit une transformée de (M_n) par une suite prévisible, on dit que (M_n) vérifie la propriété de la représentation prévisible.

chapitre
