

IV. Marchés Financiers

On modélise un tel marché à l'horizon N par

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ fini} \\ p(w) > 0 \quad (\forall w \in \Omega) \\ S_0^{(k)}, S_1^{(k)}, \dots, S_N^{(k)} : \text{prix du } k\text{-ième actif jusqu'à la date } N. \\ \quad (0 \leq k \leq d) \\ (S_n^{(0)}) \text{ est l'« actif sans risque » (1 euro).} \end{array} \right.$$

On suppose qu'on a un « taux sans risque » constant = R .

$$\text{si } S_0^{(0)} = 1 \quad \rightarrow \quad S_n^{(0)} = (1+R)^n = \frac{1}{B_n}.$$

Actualisation la valeur actualisée au temps 0 du $S_n^{(k)}$ est :

$$B_n S_n^{(k)} = \tilde{S}_n^{(k)}$$

$$\text{En particulier } \tilde{S}_n^{(0)} = 1.$$

- Un porte-feuille est : $\varphi_n^{(k)}$ = combien du k -ième actif vous possédez à la date n
 $\varphi_n^{(0)}$ = solde de votre compte en banque en euro à la date n .

On fait comme si l'on pouvait : $\left\{ \begin{array}{l} \text{« vendre des actifs à découvert » } (\varphi_n^{(k)} < 0) \\ \text{« s'endetter en euros à volonté » } (\varphi_n^{(0)} < 0). \end{array} \right.$

porte-feuille = stratégie de gestion de portefeuille

Stratégie auto-financée :

$$\sum_{k=1}^d (\varphi_{n+1}^{(k)} - \varphi_n^{(k)} S_n^{(k)}) = (\varphi_n^{(0)} - \varphi_{n+1}^{(0)}) S_n^{(0)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^d \Delta \varphi_{n+1}^{(k)} S_n^{(k)} = 0.$$

Valeur du portefeuille à la date n :

$$V_n(\varphi) = \sum_{k=0}^d \varphi_n^{(k)} S_n^{(k)}.$$

Si φ est auto-financée, on a :

$$V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) = \sum_0^d (\varphi_{n+1}^{(k)} (S_{n+1}^{(k)} - S_n^{(k)}) + \underbrace{[(\varphi_{n+1}^{(k)} - \varphi_n^{(k)}) S_n^{(k)}]}_0$$

$$V_{n+1}(\varphi) - V_n(\varphi) = \sum_0^d \varphi_{n+1}^{(k)} (S_{n+1}^{(k)} - S_n^{(k)})$$

$$\Delta V_{n+1}(\varphi) = \sum \varphi_{n+1}^{(k)} \Delta S_{n+1}^{(k)} = \langle \varphi_{n+1}, \Delta S_{n+1} \rangle$$

$$V_n(\varphi) = V_0(\varphi) + \sum_{k=1}^n \langle \varphi_k, \Delta S_k \rangle$$

Definition Stratégie: Les (φ_n) sont des suites prévisibles.

$$\beta_{n+1} V_{n+1}(\varphi) - \beta_n V_n(\varphi) = \sum \varphi_{n+1}^{(k)} = \sum \varphi_{n+1}^{(k)} \beta_{n+1} S_{n+1}^{(k)} - \beta_n S_n^{(k)}$$

$$\Delta V_{n+1}(\varphi) = \langle \varphi_{n+1}, \Delta \tilde{S}_{n+1} \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \varphi_0^{(0)} & \dots & \varphi_N^{(0)} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_0^{(d)} & \dots & \varphi_N^{(d)} \end{array}$$

φ_n est $\mathcal{F}_n$ -mesurable.
Si $\mathcal{F}_n$ contient p. atomes

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

• $\varphi_0^{(k)}$ ($\forall k$) constante

• Une stratégie autofinancée est entièrement déterminée par les $\varphi_n^{(k)}$, $1 \leq k \leq d$, $0 \leq n \leq N$ et $V_0(\varphi)$.

Chacun des $\varphi_n^{(k)}$ est entièrement déterminé par sa valeur sur les atomes de $\mathcal{F}_{n-1}$.

$$(\varphi_0^{(0)}, \dots, \varphi_0^{(d)}, \varphi_1^{(0)}, \dots, \varphi_1^{(d)}, \dots, \varphi_N^{(0)}, \dots, \varphi_N^{(d)}, V_0(\varphi))$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^d (\varphi_{n+1}^{(k)} - \varphi_n^{(k)}) S_n^{(k)} = 0 \quad \text{stratégie financée auto}$$

$$\Rightarrow \varphi_{n+1}^{(0)} - \varphi_n^{(0)} = - \frac{1}{S_n^{(0)}} \sum_{k=1}^d (\varphi_{n+1}^{(k)} - \varphi_n^{(k)}) S_n^{(k)}$$

Conclusion: L'ensemble des stratégies auto-financées est un sous-espace vectoriel de l'ensemble de toutes les stratégies.

Une stratégie d'arbitrage est une stratégie « sans risque et conduisant à un profit avec probabilité non nulle »

$$V_0(\varphi) = 0 \quad V_N(\varphi) \geq 0 \quad p(V_N(\varphi) > 0) > 0.$$

Remarque: Les marchés tendent à s'équilibrer vers une situation où il n'y a plus d'arbitrage possible.

Définition : Un marché viable est un marché où il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une φ autofinancée.

$$V_0(\varphi) \leq 0, \quad V_n(\varphi) \geq 0 \quad p(V_n(\varphi) > 0) > 0.$$

2. $\exists p \in \Pi, N \uparrow, \varphi = (\varphi^{(1)}, \dots, \varphi^{(d)})$.

$$p\left(\sum_{k=1}^d \varphi^{(k)} \Delta S_p^{(k)} > 0\right) > 0.$$

$$\sum \varphi^{(k)} \Delta S_p^{(k)} \geq 0.$$

3. Il existe une stratégie d'arbitrage.

4. Il existe une stratégie d'arbitrage tel $V_n(\varphi) \geq 0 \ (\forall n)$.

Démo : Seule chose pas évidente : $3 \Rightarrow 2$.

Théorème :

Un marché est viable si et seulement s'il existe une loi de probabilité p^* sous laquelle les prix des actifs $S_N^{(i)}$ sont tous des martingales et telle que $(\forall \omega) p^*(\omega) > 0$.

Options.

Une option est une variable aléatoire h (« prix de l'option à l'instant N »).

Exemple : Call européen sur le k -ième actif, au prix d'exercice K et à l'échéance N

$$h = \begin{cases} S_N^{(k)} - K & \text{si } K < S_N^{(k)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h = (S_N^{(k)} - K)^+ \quad + : \text{« partie positive de ... »}$$

Pour donner un prix à h à la date $n < N$, on va montrer qu'on peut faire un calcul d'espérance n le marché viable :

$$E(h | \mathcal{F}_n).$$