

## IV. Cox - Ross - Rubinstein («Modèle binomial»)

$$(S_n)_{0 \leq n \leq N}, \quad S_0 = 1.$$

$R$ : taux d'intérêt sans risque.

$$\beta = \frac{1}{1+R}.$$

$$S_0 = (1+R)^N S_0 = \frac{1}{\beta^N}.$$

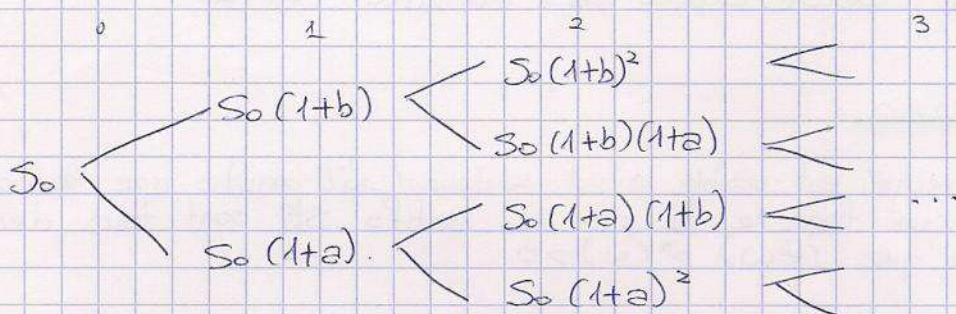
$$(\forall n < N) \quad S_{n+1} = S_n T_n.$$

de telle sorte à ce que  $(T_n)$  est une suite de variables aléatoires réelles qui ne prennent que 2 valeurs  $(1+a)$  et  $(1+b)$ .

Rq: si la suite  $(T_n)$  était indépendante,  $(S_n)$  serait une chaîne de Markov

$$\ln S_{n+1} = \ln S_n + \ln T_n.$$

$(\ln S_n)$  serait alors une marche aléatoire.



• On pose  $a < b$ .

→ Remarque: Si  $R \leq a < b$ .

$$\text{on pose } \varphi_0^0 = -S_0$$

$$V_0(\varphi) = \varphi_0^0 + \varphi_0 S_0. \quad \varphi_0 = 1. \quad \text{on n'y touche +}$$

$$V_N(\varphi) = \varphi_N^0 (1+R)^N + \varphi_N S_N \quad S_N \geq (1+a)^N S_0. \quad \text{fin } \varphi_N^0 = -S_0, \varphi_N = 1$$

$$V_N(\varphi) = -S_0 (1+R)^N + \varphi_N S_N \geq S_0 [(1+a)^N - (1+R)^N]$$

$$V_N(\varphi) \geq 0. \quad V_N(\varphi) \text{ est même strictement } \oplus \text{ lorsque l'un des } T_n \text{ vaut } (1+b)$$

donc  $p(V_N(\varphi) > 0) > 0$ , donc c'est une stratégie d'arbitrage.

→ Remarque: Si  $R \geq b > a$ .

$$\varphi_0 = -1 \quad \varphi_0^0 = S_0 \quad V_0(\varphi) = \varphi_0^0 + \varphi_0 S_0 = 0.$$

nb actif possédé      valeur sur compte en bank

$$(\forall n) \quad \varphi_n = -1 \quad \varphi_n^0 = S_0(1+r)^n$$

$$V_N(\varphi) = \varphi_N^0(1+r)^N + \varphi_N S_N = S_0(1+r)^N - S_N \geq \underbrace{S_0(1+r)^N = S_0(1+r)^N - (1+b)^N}_{\geq 0}$$

$$V_N(\varphi) \geq 0 \quad p(V_N(\varphi) > 0) > 0$$

$\Rightarrow$  une stratégie d'arbitrage.

Conclusion:  $\nexists$  stratégie d'arbitrage  $\Rightarrow r \in ]a, b[$ .

Désormais on suppose que  $r \in ]a, b[$ .

• Autre stratégie d'arbitrage possible dans le cas  $r \geq b > a$ .

$$(\forall n \leq N-1) \quad \varphi_n = -1 \quad \varphi_n^0 = S_0(1+r)^n$$

$$\varphi_N = 0 \quad \varphi_N^0 = S_0(1+r)^N - S_N$$

$$V_N(\varphi) = S_0(1+r)^N - S_N$$

Remarque: sous l'hypothèse que  $(\tilde{S}_n)$  est martingale,

$$E(\tilde{S}_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \tilde{S}_n \quad \tilde{S}_n = \beta_n S_n$$

$$= \beta^{n+1} E(S_n T_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \beta^{n+1} S_n E(T_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

$$\beta^n \tilde{S}_n = \beta^{n+1} \tilde{S}_n E(T_{n+1} | \mathcal{F}_n)$$

$$\Rightarrow 1+r = E(T_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E(T_{n+1})$$

$$= (1+a)p(T_{n+1}=1+a) + (1+b)p(T_{n+1}=1+b)$$

$$\Downarrow \\ r \in ]1+a, 1+b[$$

• Question: Ce marché est-il viable?

cad: est-il impossible de faire des arbitrages?

Rappel:  $\nexists$  proba risque neutre  $p^*$   $\Leftrightarrow$  marché viable et  $\nexists$  arbitrage

si  $(S_n)$  est une martingale, alors  $\forall \varphi$  autofinancée  $\widehat{V}_N(\varphi) = (\varphi * \tilde{S})_N$  (\*)

$$\widehat{V}_0(\varphi) = 0 = E(\widehat{V}_N(\varphi) | \mathcal{F}_0)$$

$$(*) = \widehat{V}_0(\varphi) + \sum_{i=1}^N \varphi_i^0 (\tilde{S}_i^0 - \tilde{S}_{i-1}^0) + \varphi_N (\tilde{S}_N - \tilde{S}_{N-1})$$

Donc si  $\widehat{V}_0(\varphi) = 0$  et  $\widehat{V}_N(\varphi) \geq 0$  alors  $\widehat{V}_N(\varphi) = 0$ .

Dans CRR, il existe une probabilité risque neutre.

$$E(\tilde{S}_{n+1} | \tilde{F}_n) = \tilde{S}_n.$$

$$\Rightarrow 1+R = E(T_{n+1} | \tilde{F}_n) = (1+a)p(T_{n+1}=1+a | \tilde{F}_n) + (1+b)p(T_{n+1}=1+b | \tilde{F}_n) \\ = 1+R.$$

$$\text{or } p(T_{n+1}=1+a | \tilde{F}_n) + p(T_{n+1}=1+b | \tilde{F}_n) = 1.$$

Donc il suffit de prendre  $p(T_1=t_1 \text{ et } T_2=t_2 \text{ et } \dots, T_n=t_n)$

$$= \prod p(T_i=t_i)$$

$$\text{et } p(T_i=1+a) = p \quad \text{et} \quad p(T_i=1+b) = q.$$

Remarque: sous cette loi de probabilité,  $(S_n)$  est une chaîne de Markov homogène.

Remarque: si  $\varphi$  est une stratégie d'arbitrage:

$$\left. \begin{array}{l} V_0(\varphi) = 0 \\ V_N(\varphi) \geq 0 \\ p(V_N(\varphi) > 0) > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ceci ne dépend pas de la loi de proba} \\ \text{se ne dépend que de son rapport:} \\ \{ \omega \in \Omega \mid p(\omega) > 0 \} \end{array}$$

si  $\varphi$  est une stratégie de couverture  $V_N(\varphi) = h$ .

Question: à quoi sert  $p^*$ ?

Supposons qu'on vende une option qui à l'instant  $N$  a pour valeur  $h$ .  
(ie qu'on vend à qq'un le droit de recevoir de notre part, à la date  $N$ ,  $h(\omega)$ ).

Exemple: call européen:  $h = (S_N - K)^+$  (on a vendu à qq'un le droit d'acheter l'actif  $S$  au prix  $K$  à la date  $N$ ).

On veut se couvrir en formant un portefeuille  $\varphi$  tel que  $V_N(\varphi) = h$ .

$\tilde{V}_N(\varphi) = (\varphi * \tilde{S})_N$  est une martingale.

On veut que le prix auquel on a vendu l'option (la prime) suffise à former ce portefeuille.

$V_0(\varphi)$  doit par offre et la demande être égale à la prime.

$$\text{donc prime} = V_0(\varphi) = E(\tilde{V}_N(\varphi) | \tilde{F}_0) = \beta^N E(h).$$

$$p = p(T_{n+1} = 1+a | \mathcal{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} R & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & a \end{vmatrix}}$$

$$q = p(T_{n+1} = 1+b | \mathcal{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} a & R \\ 1 & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & a \end{vmatrix}} = \frac{a-R}{a-b}$$

$$p^*(T_n = 1+a) = \frac{b-R}{b-a}$$

$$p^*(T_n = 1+b) = \frac{R-a}{b-a}$$

Rappel :  $[\exists! p^*] \Leftrightarrow$  marché complet et l'option européenne est répliquable.

→ Pour tout  $h$  variable aléatoire  $\geq 0$ ,  $h = V_N(\varphi)$

$$\beta^N E(h) = \beta^N E(V_N(\varphi) | \mathcal{F}_0) = V_0(\varphi)$$

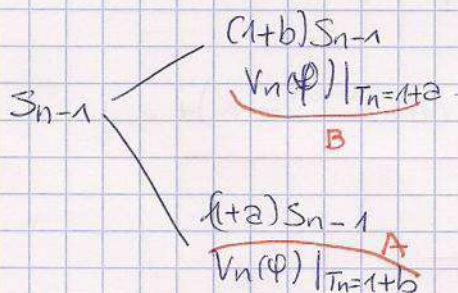
$\uparrow$  car marché viable

$E(h)$  a une valeur unique quelque soit la loi de proba risq neutre  $p^*$

Si  $A \subset \Omega$ ,  $h = 1_A$ ,  $E(h) = p^*(A)$ .

Remarque :  $\beta^N E(h) = V_0(\varphi)$ .

Paradoxe: si le cours de l'actif a tendance à monter, j'ai le sentiment que je dois vendre mes call plus chers, mais il n'en est rien, car pour constituer mon portefeuille de couverture, j'achète justement des actifs à la hausse (ce qui va être à mon avantage).



$$V_n(\varphi) = \varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_n$$

$$V_n(\varphi) |_{T_n=1+a} = (\varphi_n^0 + R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+a) |_{T_n=1+a}$$

$$V_n(\varphi) |_{T_n=1+b} = (\varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+b)) |_{T_n=1+b}$$

$$\Rightarrow \frac{p \cdot V_n(\varphi) |_{T_n=1+a}}{E(V_n(\varphi) |_{T_n=1+a} | \mathcal{F}_{n-1})} = (\varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+a)) \cdot p$$

$$\frac{q \cdot V_n(\varphi) |_{T_n=1+b}}{E(V_n(\varphi) |_{T_n=1+b} | \mathcal{F}_{n-1})} = (\varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+b)) \cdot q$$

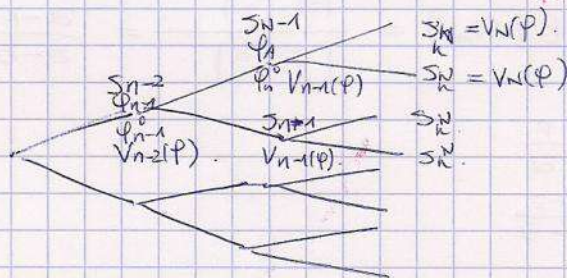
$$A = \varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+a)$$

$$B = \varphi_n^0 (1+R)^n + \varphi_n S_{n-1}(1+b)$$

$$\varphi_n^0 = \frac{\begin{vmatrix} A & (1+b)S_{n-1} \\ B & (1+a)S_{n-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+R)^n & (1+b)S_{n-1} \\ (1+R)^n & (1+a)S_{n-1} \end{vmatrix}}$$

$$\varphi_n = \frac{\begin{vmatrix} (1+R)^n & A \\ (1+R)^n & B \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (1+R)^n & S_{n-1}(1+a) \\ (1+R)^n & S_{n-1}(1+b) \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{B-A}{S_{n-1}(b-a)} = \varphi_n$$



ratio de couverture

$$\varphi_n = \frac{B-A}{S_n(1+b) - S_{n-1}(1+a)}$$

Remarque: Si je possède une option  $h$  que je souhaite revendre à la date  $n < N$ , je vais la vendre au prix  $V_n(\varphi)$ .

$$\widehat{V}_n(\varphi) = E(\widehat{V}_N(\varphi) | \mathcal{F}_n)$$

$$\text{donc } V_n(\varphi) = \beta^{N-n} E(V_N(\varphi) | \mathcal{F}_n)$$

Exemple: soit  $h = (S_N - k)_+$

$$\beta^{N-n} E[(S_N - k)_+ | \mathcal{F}_n] = \beta^{N-n} E[(S_n T_{n+1} T_{n+2} \dots T_N - k)_+ | \mathcal{F}_n]$$

$$\beta^{N-n} E[(S_n T_{n+1} T_{n+2} \dots T_N - k)_+ | \mathcal{F}_n] = \beta^{N-n} E[(S_n T_{n+1} \dots T_N - k)_+]$$

$$= \beta^{N-n} \sum_{i=0}^{N-n} C_{N-n}^i p^i q^{N-n-i} (S_n (1+a)^i (1+b)^{N-n-i} - k)_+$$

Le prix du call à l'instant  $n$  est:

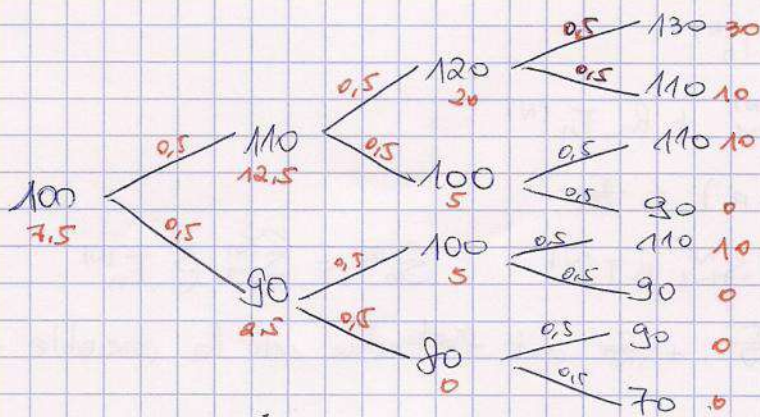
$$H_n = \beta^{N-n} \sum_{i=0}^{N-n} C_{N-n}^i p^i q^{N-n-i} (S_n (1+a)^i (1+b)^{N-n-i} - k)_+$$

$$\varphi_n = \frac{H_n|_{T_n=1+b} - H_n|_{T_n=1+a}}{S_n|_{T_n=1+b} - S_n|_{T_n=1+a}}$$

Exercice: call à neuf mois, 3 périodes de 3 mois  $N=3$ .  
de prix d'exercice  $k$ .

$S_0 = 100$  taux sans risque nul ( $R=0$ ).

$$S_{n+1} - S_n = \pm 10.$$



$$h = (S_3 - 100)_T$$

$$S_1 = 110 \quad \psi_1 = \frac{20 - 5}{120 - 100} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$V_1(\psi) = 12.5 = \psi_1^0 + 110\psi_1 + 110\frac{3}{4}$$

$$\psi_1^0 = 12.5 - 110\frac{3}{4}$$

## BLACK ET SCHOLES.

On considère un actif  $S$  et le cours évolue en continue entre les dates 0 et  $T$ , ( $T$  en années)

On peut déterminer le prix d'un put d'échéance  $T$  et du prix d'exercice  $K$   
(donc se valorise à l'échéance vaut  $(K - S(T))$ ).

On a aussi un actif sans risque capitalisé en continu au taux minimal  $R$ . On va approcher ce marché par modèle de Cox-Ross-Rubinstein pour  $N$  périodes (après on fera tendre  $N \rightarrow \infty$ )

$$C.R.R: (S_n^{(N)})_{0 \leq n \leq N}$$

$$(\text{ie qu'on imagine } S_N^{(N)} = S(\frac{nT}{N}))$$

$$\text{taux sans risque } R_N = (\text{taux proportionnel au nominal } KT) = \frac{KT}{N}$$

$$\text{Soit } T \in \mathbb{R}_+$$

$$\begin{aligned} 1 + b_N &= (1 + R_N) e^{\frac{rT}{N}} \\ 1 + a_N &= (1 + R_N) e^{-\frac{rT}{N}} \end{aligned}$$

$$S_n^{(N)} = S_{n-1}^{(N)} T_n^{(N)}$$

$$\ln S_n^{(N)} = \ln S_{n-1}^{(N)} + \ln T_n^{(N)}$$

$$\ln T_n^{(N)} = \ln(1+R) \pm \frac{F}{N}$$

$$\beta^n S_n^{(N)} = \beta^{n-1} S_{n-1}^{(N)} \beta T_n^{(N)} \quad \hat{S}_n^{(N)} = \hat{S}_{n-1}^{(N)} \beta T_n^{(N)}$$

On voit que  $[-\frac{F}{N}; +\frac{F}{N}]$  est l'étendue de la variable  $\ln(\beta T_n^{(N)})$ .

$$p^*(T_n = 1+2N) = \frac{b_N - R_N}{b_N - a_N}$$

$$\ln S_N^{(N)} = \ln S_0^{(N)} + \underbrace{\ln T_1^{(N)} + \ln T_2^{(N)} + \dots + \ln T_N^{(N)}}_{Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N}$$

Théorème Central Limite.

$(X_n)$  de v.a. indépendantes toutes de m. loi que  $X$ , alors

$$X_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

Pour  $N$  grand,

$X_N \rightsquigarrow$  loi normale de paramètres  $(NE(X), \sqrt{N} \sigma_X)$

$\frac{X_N}{N} \rightsquigarrow$  loi normale de paramètres  $(E(X), \frac{\sigma_X}{\sqrt{N}})$

$\uparrow$   
loi des gds nb.

Exercice 2 sur les martingales (poly).

$E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  ?  $S_n$ .

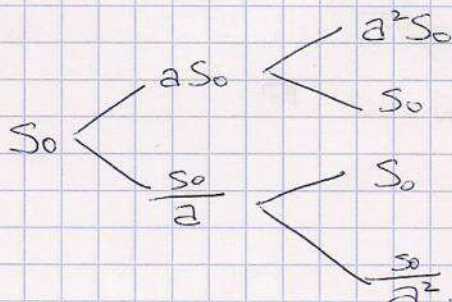
$$p(S_{n+1} = a S_n) = p.$$

$$p(S_{n+1} = \frac{S_n}{a}) = 1-p.$$

$S_0 = 100$  constante.  
 $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$$S_n \begin{cases} p & a S_n \\ 1-p & S_n/a \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, S_1 = a S_0, S_1 = \frac{S_0}{a}, \Omega\} = \mathcal{F}(S_0, S_1).$$



$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(S_0, S_1, S_2) = \left\{ \emptyset, \overbrace{S_2 = a^2 S_0}^{\text{stompe}}, \overbrace{S_2 = S_0 \text{ et } S_1 = a S_0}^{\text{stompe}}, \overbrace{S_2 = S_0}^{\text{stompe}} \right. \\ \left. \text{et } S_1 = \frac{S_0}{a}, S_2 = \frac{S_0}{a^2}, \dots, \Omega \right\}.$$

$$E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = p a S_n + (1-p) \frac{S_n}{a} \\ = S_n \left( p a + \frac{1-p}{a} \right)$$

$$1) \left( p a + \frac{1-p}{a} \right) = \frac{1}{3} \times 1,05 + \frac{1 - \frac{1}{3}}{1,05} = 0,98.$$

$$\Rightarrow E(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = 0,98 S_n < S_n \rightarrow \text{sur-martingale.}$$

2) Il suffit de trouver  $p$  tel que :

$$p a + \frac{1-p}{a} = 1.$$

$$p = \frac{1 - 1/a}{a - 1/a} = \frac{a-1}{a^2-1}.$$

$$p = \frac{1}{a+1}.$$

3).

$$\ln S_0 \begin{cases} \ln S_0 + \ln a & \begin{cases} \ln S_0 + 2 \ln a \\ \ln S_0 \end{cases} \\ \ln S_0 - \ln a & \begin{cases} \ln S_0 \\ \ln S_0 - 2 \ln a \end{cases} \end{cases}$$

$$E(\ln S_{n+1} | \mathcal{F}_n) ? \ln S_n.$$

$$E(\ln S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = p(\ln a + \ln S_n) + (1-p)(\ln S_n - \ln a) \\ = \ln S_n + \underbrace{\ln a (p - (1-p))}_{\text{}}.$$

$$\ln a (1 - (1-p)) = (2p-1) \ln a.$$

$$= 0 \text{ si } p = 1/2.$$

$$> 0 \text{ si } p > 1/2.$$

$$< 0 \text{ si } p < 1/2.$$

martingale.

sous-martingale.

sur-martingale.

$p = 1/2$ .  $(\ln(S_n))$  possède-t-elle la p.r.p. ?

( $\Leftrightarrow$ ) toute martingale  $(M_n)$  s'écrit  $M_n = (\ln(S) * \varphi)_n$ .

Théorème : Une marche aléatoire martingale  $W_n$  possède la p.r.p.ssi  $\Delta W_n = W_n - W_{n-1}$  ne dépend que 2 valeurs.

$\rightarrow W_n = W_0 + \sum T_i$  où  $(T_i)$  suite indépendante équilibrée.

Conclusion:  $\ln S_{n+1} = \ln S_n \pm \ln 2$ .

$\Delta \ln S_{n+1} = \pm \ln 2$  donc les hypothèses du théorème st bien ✓

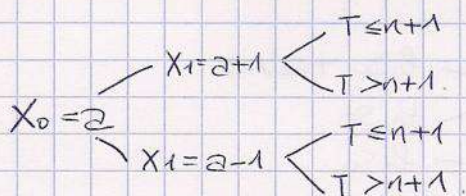
4. Dans ces conditions, soit  $(M_n)$  une autre martingale. Représentez la transformée de  $\ln(S_n)$ . trouvez une suite prenable  $(p_n)$  telle que  $M_n = (\ln S_n) * p_n + \text{cte.}$

$$((\text{cls}) * \varphi)_{n+1} - ((\text{cls}) * \varphi)_n = (\ln S_{n+1} - \ln S_n) \varphi_{n+1}$$

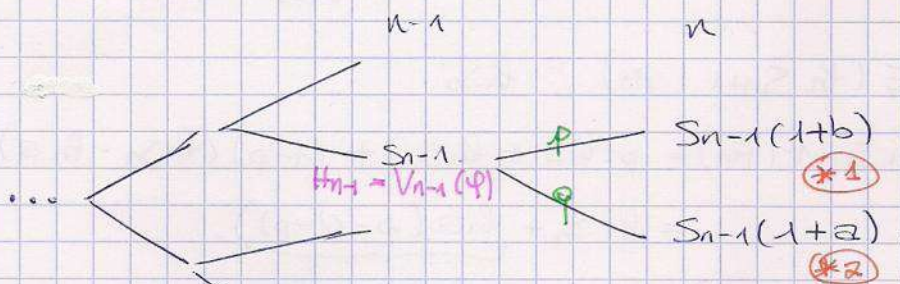
$$\Delta((\text{lhs}) * \varphi)_{n+1} = \varphi_{n+1} \Delta(\text{lhs}_{n+1})$$

$$q = \frac{R - a}{b - a}$$

$$p = \frac{b-r}{b-a}$$



- toute chaîne de Markov n'est pas 1 martingale



$$(*4) \quad H_n = \frac{E^*(V_n(\varphi))|_{T_n=1+b}(\tilde{F}_{n-1})}{p(T_n=1+b)} = \ll V_n(\varphi) |_{T_n=1+b} \gg$$

$$\textcircled{*2} \quad H_n = \frac{E^*(V_n(\varphi) |_{T_n=1+a} | \tilde{\pi}_{n-1})}{p(T_n=1+a)} = \langle V_n(\varphi) |_{T_n=1+a} \rangle$$

Remarque sur le ratio de couverture ds le modèle de Cox-Ross-Rubinstein.

(On pose pour simplifier  $R=0$ )

Le prix d'une certaine option européenne h à la date  $n = V_h(\varphi)$  si  $\varphi$  est une stratégie de couverture.

$$\varphi_n = \frac{\frac{E^*(V_n(\varphi) | \mathcal{F}_{T=1+b} | \tilde{F}_{n-1})}{p(T_n=1+b)} - \frac{E^*(V_n(\varphi) | \mathcal{F}_{T=1+a} | \tilde{F}_{n-1})}{p(T_n=1+a)}}{S_{n-1}(1+b) - S_{n-1}(1+a)}$$

$$\Rightarrow \varphi_n = \frac{H_n |_{T_n=1+b} - H_n |_{T_n=1+a}}{S_n |_{T_n=1+b} - S_n |_{T_n=1+a}} = \frac{H_n |_{T_n=1+b} - (pH_n |_{T_n=1+a} + qH_n |_{T_n=1+b})}{S_n |_{T_n=1+b} - (pS_n |_{T_n=1+a} + qS_n |_{T_n=1+b})}$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_n |_{T_n=1+b} - (pH_n |_{T_n=1+a} + qH_n |_{T_n=1+b})}{H_n |_{T_n=1+b} - H_n |_{T_n=1+a}} \stackrel{=p}{=} \frac{pH_n |_{T_n=1+b} - pH_n |_{T_n=1+a}}{H_n |_{T_n=1+b} - H_n |_{T_n=1+a}} \\ & = \frac{H_n - E^*(\hat{H}_n | \tilde{F}_{n-1})}{S_n - E^*(\hat{S}_n | \tilde{F}_{n-1})} = \frac{\hat{H}_n - \hat{H}_{n-1}}{\hat{S}_n - \hat{S}_{n-1}} \quad \sim \text{pour actualiser} \end{aligned}$$

donc ratio de couverture =  $\frac{\Delta H_n}{\Delta S_n}$ .

Attention:  $\Delta \hat{H}_n = \hat{H}_n - \hat{H}_{n-1} \neq \beta^n \Delta H_n$ .

Remarque: C'est surprenant car sous cette forme on ne voit pas immédiatement que  $\varphi_n = \frac{\Delta \hat{H}_n}{\Delta \hat{S}_n}$  est prévisible.

### Taux d'intérêt instantané et capitalisation continue.

Taux d'intérêt nominal  $\tau$  par an.

Cette info ne suffit pas, il faut connaître la capitalisation (mensuel, hebdomadaire, ...) qd les intérêts sont-ils versés ?

Pour une capitalisation en  $m$  périodes par an,

taux d'intérêt proportionnel:  $\frac{\tau}{m}$ .

taux d'intérêt équivalent par an:  $(1 + \frac{\tau}{m})^m - 1$ .

Si  $m \rightarrow \infty$

$$(1 + \frac{\tau}{m})^m - 1 \rightarrow e^{\tau} - 1 \quad \text{taux instantané}$$

$$e^{n\tau(1+\frac{\tau}{m})}$$

$$\left( \frac{e^{x(1+x)}}{x} \right) \xrightarrow{0} 1$$

taux d'intérêt entre 2 instants  $t < u$  :  
(par an, si  $t$  et  $u$  sont des dates en années).

$$R_{tu} = \frac{S(u) - S(t)}{S(t)} \times \frac{1}{u - t}$$

$$\lim_{u \rightarrow t} R_{tu} = \frac{S'(t)}{S(t)}$$

Or si  $S(0)$  est épargné avec capitalisation continue pdt  $t$  années,  
on aura  $S(t) = S(0) \times (e^{\tau})^t$ .

$$\frac{S'(t)}{S(t)} = \frac{S(t+dt) - S(t)}{S(t) dt}$$

$$S'(t) = \tau S(0) e^{\tau t} \quad \text{donc} \quad \frac{S'(t)}{S(t)} = \tau$$

Conclusion : en capitalisation continue, le nominal par an  
s'interprète comme taux instantané par an.

| $m$      |                            |
|----------|----------------------------|
| 1        | 6% nominal par an.         |
| 2        | 6,090                      |
| 4        | 6,136                      |
| 12       | 6,168                      |
| 52       | 6,180                      |
| 365      | 6,183                      |
| $\infty$ | 6,184 % = $e^{\tau} - 1$ . |

$\tau h S(t)$  : montant des intérêts touchés en 1h entre les  
instants  $t$  et  $t+h$

$$\text{Si } h = 1 \text{ heure} = \frac{1}{365 \times 24} \text{ an.}$$

CRR:  $N$ 

$$R_N = \frac{RT}{N}$$

$$1 + a_N = (1 + R_N) e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

$$1 + b_N = (1 + R_N) e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}$$

$$S_N^{(N)} = S_0 T_1^{(N)} \dots T_N^{(N)}$$

$$\tilde{S}_N = \beta^N S_0 T_1 \dots T_N = S_0 (\beta T_1) \dots (\beta T_N)$$

$$\begin{aligned} \ln \tilde{S}_N &= \ln S_0 + \ln \beta T_1 + \dots + \ln \beta T_N \\ &= \ln S_0 + X_1^{(N)} + \dots + X_N^{(N)} \quad \text{où les } X_k = \ln \beta T_k \end{aligned}$$

et sous  $p^*$ , les  $X_k^{(N)}$  sont équidistribués et indépendants.

On applique un théorème analogue au théorème central limite, et on en conduit que pour  $N$  très grand

$\ln \tilde{S}_N - \ln S_0$  suit une loi approximativement normale (de Gauss) de paramètres  $(NE(\ln \beta T_1^{(N)}), \sqrt{N} \frac{\sigma}{\sqrt{N}})$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} NE^*(\ln \beta T_1) = \lim_{N \rightarrow \infty} N \left( \frac{R_N - a_N}{b_N - a_N} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{b_N - R_N}{b_N - a_N} \left( -\frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right) \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{N}}{b_N - a_N} (2R_N - a_N - b_N)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{N}}{(1+b_N) - (1+a_N)} (2(1+R_N) - (1+a_N) - (1+b_N))$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{N}}{e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}} (2 - e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} - e^{-\frac{\sigma}{\sqrt{N}}})$$

développement limite:  $e^{\frac{\sigma}{\sqrt{N}}} = 1 + \frac{\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{\sigma^2}{2N}$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma \sqrt{N} \left( \frac{\sigma^2}{2} + o\left(\frac{1}{N}\right) \right)}{\frac{2\sigma}{\sqrt{N}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{N}} (\sigma^2 + o(1))}{\frac{1}{\sqrt{N}} (2\sigma + o(1))}$$

$$= \frac{-\sigma^2}{2}$$

$$\tilde{S}_N = e^{\ln S_0 + Y_N} \quad \text{où } Y_N = \ln \tilde{S}_N - \ln S_0$$

Preis du put européen

(au temps  $t=0$ )  $E(\beta^N (K - S_N)_+)$

$$= E\left(\left(\frac{k}{(1+RT)^N} - S_N\right)_+\right) = E\left(\left(\frac{k}{(1+RT)^N} - S_0 e^{y_N}\right)_+\right).$$

$$= \sum_{y \in \mathcal{N}(S_2)} \left(\frac{k}{(1+RT)^N} - S_0 e^y\right)_+ p(N=y).$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{k}{(1+RT)^N} - S_0 e^y\right)_+ e^{-\frac{y+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2}} dy$$

$\downarrow$   
 $N \rightarrow \infty$   
 $e^{RT}$

L'intégration est  $\neq 0$ ssi  $\frac{k}{e^{RT}} \geq S_0 e^y$ .

on pose  $y = \frac{y + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}$   $dy = \frac{dy}{\sigma}$   $y = \sigma j - \frac{\sigma^2}{2}$ .

$$P = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (K e^{-RT} - S_0 e^{\sigma j - \frac{\sigma^2}{2}})_+ e^{-\frac{j^2}{2}} dj.$$

$$K e^{-RT} \geq S_0 e^{\sigma j - \frac{\sigma^2}{2}} \Leftrightarrow -RT + \ln \frac{K}{S_0} \geq \sigma j - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow j \leq \underbrace{\left(\frac{\ln \frac{K}{S_0}}{\sigma} - RT + \frac{\sigma^2}{2}\right)}_{-d_2} \frac{1}{\sigma}.$$

$$d_2 = -\frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{K}{S_0} - RT + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

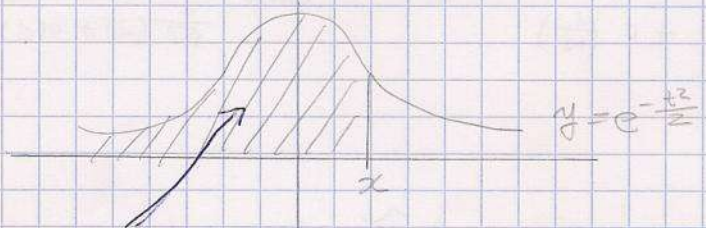
$$d_1 = d_2 + \sigma = \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{K}{S_0} - RT - \frac{\sigma^2}{2}\right).$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-d_2} (K e^{-RT} - S_0 e^{\sigma j - \frac{\sigma^2}{2}}) e^{-\frac{j^2}{2}} dj.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( K e^{-RT} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{j^2}{2}} dj - S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{\sigma j - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{j^2}{2}} dj \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( K e^{-RT} \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{j^2}{2}} dj - S_0 \int_{-\infty}^{-d_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)$$

$$= K e^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1)$$



$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \ll \text{Fct de répartition de la loi normale centrée-réduite} \gg$$

$$= F(x).$$

Relation de parité call-put.

valeur du call à l'échéance  $(S_N - K)_+$

" " put " "  $(K - S_N)_+$

$$K - S_N = -(S_N - K)$$

$$(S_N - K)_+ - (- (S_N - K)_+) = S_N - K$$

$$C_0 - P_0 = S_0 - K e^{-RT}$$

donc si on est dans un marché complet, on actualise à une date 0.

$$E^*(\beta^N (S_N - K)_+ | \mathcal{F}_N) - E^*(\beta^N (K - S_N)_+ | \mathcal{F}_N) = E^*(\beta^N S_N | \mathcal{F}_N) - K \beta^N$$

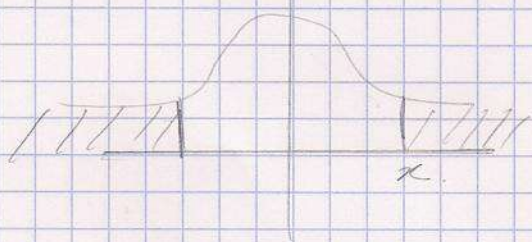
$$\tilde{C}_N - \tilde{P}_N = \tilde{S}_N - \frac{K}{(1+R)^N}$$

Remarque: en fait, <sup>besoin</sup> pour de l'hypothèse « marché complet »  
(cf exercice)

Conséquence:

La formule de Black Scholes pour  $P_0$  entraîne donc:

$$\begin{aligned} C_0 &= P_0 + S_0 - K e^{-RT} \\ &= K e^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1) + S_0 - K e^{-RT} \\ &= K e^{-RT} (F(-d_2) - 1) - S_0 (F(-d_1) - 1) \\ &= S_0 F(d_1) - K e^{-RT} F(d_2) \end{aligned}$$



$$1 - F(x) = F(-x)$$

$$\rho_m = \frac{\Delta \tilde{P}_m}{\Delta \tilde{S}_m} = \frac{\tilde{P}_m - \tilde{P}_{m-1}}{\tilde{S}_m - \tilde{S}_{m-1}}$$

$$\rho(k) = \frac{\partial \tilde{P}(k)}{\partial \tilde{S}(k)}$$

notion de  
put en  
général

$$\rightarrow P(0) = K e^{-RT} F(-d_2) - S_0 F(-d_1) = \textcircled{*}$$

Calculons  $P(k)$ , c'est en appliquant Black et Scholes à une option put d'échéance  $T-k$ , de prix  $K$ , taux sans risque  $R$ .

Mais si  $\sigma$  est l'écart-type de  $\ln\left(\frac{\tilde{S}_T}{S_0}\right)$  quel est l'écart-type de  $\ln\left(\frac{S(t) e^{-R(T-k)}}{S(t)}\right)$  ?

$$\rightarrow \sqrt{\sigma^2 \frac{T-k}{T}} = \sigma \sqrt{\frac{T-k}{T}}$$

$$\sigma = \sigma_a \sqrt{T}$$

$$\textcircled{*} \Rightarrow \underline{P(0)} = K e^{-RT} F\left(-\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T}} \left(\ln \frac{S_0}{K} + RT - \frac{\sigma_a^2 T}{2}\right)\right) - S_0 F\left(-\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T}} \left(\ln \frac{S_0}{K} + RT + \frac{\sigma_a^2 T}{2}\right)\right)$$

$$\underline{P(k)} = K e^{-R(T-k)} F\left(-\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T-k}} \left(\ln \frac{S(k)}{K} + R(T-k) - \frac{\sigma_a^2 (T-k)}{2}\right)\right) - S_0 F\left(-\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T-k}} \left(\ln \frac{S(k)}{K} + R(T-k) + \frac{\sigma_a^2 (T-k)}{2}\right)\right)$$

$$F'(t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{\partial P(t)}{\partial S(t)} = k e^{-R(T-t)} \left( -\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T-t}} \times \frac{1}{S(t)k} \right) F'(-d_2) - f(-d_1)$$

$$-S(t) \left( -\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T-t}} \times \frac{1}{k S(t)} \right) F'(-d_2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{-1}{\sigma_a \sqrt{T-t}} \left( \frac{e^{-R(T-t)}}{S(t)} F'(-d_2) - \frac{F'(-d_1)}{k} \right) - f(-d_1)$$

$$= -\frac{1}{\sigma_a \sqrt{T-t}} \left( \frac{e^{-R(T-t)} e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{S(t) \sqrt{2\pi}} - \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{k \sqrt{2\pi}} \right) - f(-d_1) = -f(-d_1)$$

$$\frac{1}{S(t) \sqrt{2\pi}} \left( e^{-R(T-t)} - \frac{\left( \ln \frac{S(t)}{K} + R(T-t) \right)^2 + \left( \frac{\sigma_a^2 (T-t)}{2} \right)^2 + 2 \left( \ln \frac{S(t)}{K} + R(T-t) \right) \left( \frac{\sigma_a^2 (T-t)}{2} \right)}{2 \sigma_a^2 (T-t)} \right)$$

$\ln \left( \frac{S(t)}{K e^{-R(T-t)}} \right)$

$$- \frac{1}{k \sqrt{2\pi}} ( \dots )$$

$$= 0$$

$$\boxed{\frac{\partial C}{\partial S} = F(d_1)}$$

### Exercice 1 (Sur les Martingales [poly])

Il faut montrer que  $E(W_{n+1} | \mathcal{F}_n) = W_n$  et  $E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = M_n$ .

$$W_{n+1} = S_{n+1} - (2p-1)(n+1).$$

$$E(M_{n+1} | \mathcal{F}_n) = E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n + Y_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right).$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}} | \mathcal{F}_n\right).$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} E\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^{Y_{n+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} \left( \frac{1-p}{p} \overbrace{p(Y_{n+1}=1)}^{p} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{-1} \overbrace{p(Y_{n+1}=-1)}^{1-p} \right).$$

$$= \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n} (1-p+p) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$$

$$= M_n.$$

FIN