

Mathématiques financières

Erwan Penchèvre

2011–2012

1 Espérance conditionnelle

Tous les espaces de probabilité Ω seront, jusqu'à mention explicite du contraire, des ensembles finis et tels que $(\forall \omega \in \Omega) \quad p(\{\omega\}) > 0$.

Définition 1.1 Soit A et B deux événements, $p(B) \neq 0$, on rappelle que la probabilité conditionnelle de A sachant B est le nombre noté

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cup B)}{p(B)}$$

Définition 1.2 (espérance conditionnelle sachant un événement) Soit X une variable aléatoire et B un événement. L'espérance conditionnelle de X sachant B est le nombre

$$E(X \mid B) = \sum_{n \in X(\Omega)} np(X = n \mid B)$$

Proposition 1.1

$$E(X \mid B) = \frac{E(X\mathbb{1}_B)}{p(B)}$$

Définition 1.3 Soit ξ une variable aléatoire et $\phi : \xi(\Omega) \longrightarrow E$ une fonction à valeurs dans un ensemble E quelconque. Alors $\phi \circ \xi$ est une variable aléatoire à valeurs dans E , notée $\phi(\xi)$. On dit que c'est une fonction déterministe de ξ (puisque sa valeur, bien qu'aléatoire, est entièrement déterminée par celle de ξ)

Définition 1.4 (loi conditionnelle d'une variable sachant ξ) Soit ξ et X deux variables aléatoires, et ϕ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \phi : X(\Omega) \times \xi(\Omega) &\longrightarrow [0, 1] \\ (n, k) &\longmapsto p(X = n \mid \xi = k) \end{aligned}$$

Alors à n fixé, $\phi(n, \xi)$ est une variable aléatoire, fonction déterministe de ξ , que l'on note

$$\pi_X(n \mid \xi)$$

Autrement dit

$$(\forall (n, \omega) \in X(\Omega) \times \Omega) \quad \pi_X(n \mid \xi)(\omega) = p(X = n \mid \xi = \xi(\omega))$$

Définition 1.5 (espérance conditionnelle sachant ξ) Soit ξ et X deux variables aléatoires. L'espérance conditionnelle de X sachant ξ est une fonction déterministe de ξ , notée $E(X | \xi)$ et définie par :

$$E(X | \xi) = \sum_{n \in X(\Omega)} n \pi_X(n | \xi)$$

Autrement dit,

$$E(X | \xi)(\omega) = E(X | \xi = \xi(\omega))$$

Proposition 1.2 L'espérance conditionnelle sachant ξ vérifie les propriétés suivantes :

(i) Linéarité :

$$E(\lambda X + \mu Y | \xi) = \lambda E(X | \xi) + \mu E(Y | \xi)$$

(ii) Positivité : si $X \geq 0$, alors $E(X | \xi) \geq 0$ (et alors l'égalité n'est possible que si X est identiquement nulle).

(iii) Si X est une fonction déterministe de ξ , alors

$$E(X | \xi) = X$$

(iv) Si Z est une fonction déterministe de ξ , et X une variable aléatoire quelconque, alors

$$E(ZX | \xi) = ZE(X | \xi)$$

(v) Soit Z une fonction déterministe de ξ à valeurs dans un ensemble F , et X une variable aléatoire quelconque à valeurs dans un ensemble E . Soit $H : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables ; alors $H(X, Z)$ est une variable aléatoire. Soit K la fonction définie par :

$$\begin{aligned} H : \Omega \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, z) &\longmapsto E(H(X, z) | \xi)(\omega) \end{aligned}$$

Alors on a :

$$(\forall \omega \in \Omega) \quad E(H(X, Z) | \xi)(\omega) = K(\omega, Z(\omega))$$

(vi) $E(X | \xi)$ est l'unique variable Y fonction déterministe de ξ vérifiant la propriété suivante :
Pour toute variable Z fonction déterministe de ξ , on a $E(XZ) = E(YZ)$.

(vii) Si X est une variable aléatoire quelconque, alors

$$E(E(X | \xi)) = E(X)$$

(viii) Si X et ξ sont des variables aléatoires indépendantes, alors

$$E(X | \xi) = E(X)$$

Remarques

- La propriété (vii) rappelle le calcul d'une moyenne statistique au sein d'une population groupée par classes.
- La réciproque de la propriété (viii) est fausse.
- N'oublions pas qu'on a fait l'hypothèse d'un modèle fini discret. La définition 1.5 est difficile à généraliser ; en revanche, la propriété (vi) fournit une caractérisation de l'espérance conditionnelle valable aussi pour les variables continues.

2 Algèbres et tribus

Définition 2.1 Une tribu sur Ω est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable. Autrement dit,

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega),$$

et pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, l'événement

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

est encore un élément de $\mathcal{A}$.

Au moyen de la formule de Morgan, on montre qu'une tribu est stable par intersection dénombrable : l'événement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

est aussi un élément de $\mathcal{A}$.

Remarques

- Quand Ω est un ensemble fini (comme c'est ici le cas), on appelle une tribu *algèbre*, l'opération $\cup$ étant alors l'analogue de l'addition algébrique, et l'opération $\cap$ l'analogue de la multiplication.
- L'ensemble des parties de Ω noté $\mathcal{P}(\Omega)$ est lui-même une tribu.
- Dans un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, l'ensemble $\mathcal{A}$ de tous les événements (conçus comme des sous-ensembles de l'ensemble Ω des événements élémentaires) doit être une tribu. Ceci garantit l'universalité de la règle pour calculer la probabilité d'une réunion disjointe :

$$p\left(\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} p(A_n)$$

Lorsque Ω est de cardinal fini (comme c'est ici le cas), on peut toujours prendre $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; au contraire, pour les modèles continus, ce n'est pas toujours possible.

Définition 2.2 Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux tribus telles que $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, on dit que $\mathcal{A}$ est une sous-tribu de $\mathcal{B}$, et que $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{A}$.

Exemple fondamental Soit $B_1, B_2, \dots, B_n$ des événements constituant une partition de Ω :

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^n B_i$$

$$(\forall i \neq j) \quad B_i \cap B_j = \emptyset$$

Posons

$$\mathcal{B} = \{B_{i_1} \cup B_{i_2} \cup \dots \cup B_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, i_1, i_2, \dots, i_k \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$$

$\mathcal{B}$ est une tribu, appelée *tribu engendrée par cette partition*. On dit que les B_i sont les *atomes* de cette tribu.

Réciproque En fait, toute tribu finie est une tribu engendrée par une partition. Soit en effet $\mathcal{B}$ une tribu de cardinal fini. Nommons $B_1, B_2, \dots, B_n$ les éléments de $\mathcal{B}$ qui ne contiennent pas d'autre élément de $\mathcal{B}$ qu'eux-mêmes et la partie vide $\emptyset$. Autrement dit :

$$(\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket) (\forall A \in \mathcal{B}) \quad A \subset B_i \Rightarrow A = B_i \text{ ou } A = \emptyset$$

Alors les B_i constituent une partition de Ω , et $\mathcal{B}$ est la tribu engendrée par cette partition. Remarquons que, si ω est un élément quelconque de Ω , l'atome contenant ω peut s'écrire :

$$\bigcap_{A \in \mathcal{B}, \omega \in A} A$$

Définition 2.3 Soit X une variable aléatoire. Les événements de la forme $X = k$ constituent une partition de Ω et donc les atomes d'une tribu $\sigma(X)$ appelée tribu engendrée par X . On a :

$$\sigma(X) = \{X \in \Gamma \mid \Gamma \subset X(\Omega)\}$$

Définition 2.4 Soit $\mathcal{B}$ une tribu. Une variable aléatoire X est dite $\mathcal{B}$ -mesurable si

$$(\forall \Gamma \subset X(\Omega)) \quad (X \in \Gamma) \in \mathcal{B}$$

Remarques

- Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux tribus finies, dire que $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{A}$ revient à dire que les atomes de $\mathcal{A}$ sont des réunions d'atomes de $\mathcal{B}$.
- Dire que X est $\mathcal{B}$ -mesurable revient à dire que cette variable est constante sur les atomes de $\mathcal{B}$.
- Si $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n$ est une famille de variables aléatoires, le $(n-1)$ -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1})$ et le n -uplet $(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$ sont aussi des variables aléatoires, et la tribu engendrée par l'un est plus fine que celle engendrée par l'autre :

$$\sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}) \subset \sigma(X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n)$$

- $\sigma(X)$ est la tribu la moins fine pour laquelle X soit mesurable.
- Les variables $\sigma(X)$ -mesurables ne sont autres que les fonctions déterministes de X .

Définition 2.5 (espérance conditionnelle sachant $\mathcal{B}$) Soit $\mathcal{B}$ une tribu finie d'atomes $B_1, B_2, \dots, B_n$. Soit X une variable aléatoire. L'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ est la variable aléatoire $\mathcal{B}$ -mesurable suivante :

$$E(X \mid \mathcal{B}) = \sum_{i=1}^n \frac{E(X \mathbb{1}_{B_i})}{p(B_i)} \mathbb{1}_{B_i}$$

Remarque Si X et ξ sont deux variables aléatoires, on a $E(X \mid \sigma(\xi)) = E(X \mid \xi)$: ainsi, l'espérance conditionnelle sachant une variable ne dépend pas vraiment des *valeurs* de cette variable, mais seulement de la tribu qu'elle engendre. C'est bien en cela que réside l'intérêt de travailler avec des tribus. On pourrait aussi définir une sorte de « mesure de probabilité conditionnelle sachant $\mathcal{B}$ », notée $p(\dots \mid \mathcal{B})$. On pourrait alors montrer que les éléments de la tribu sont précisément les événements A tels que $p(A \mid \mathcal{B}) = 0$ ou 1 . Autrement dit, les éléments d'une tribu sont les événements que l'on juge être entièrement déterminés « sachant cette tribu » : réalisés, de probabilité conditionnelle égale à 1 , ou bien au contraire, impossibles, de probabilité conditionnelle nulle.

Proposition 2.1 *L'espérance conditionnelle sachant $\mathcal{B}$ vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) *Si X est $\mathcal{B}$ -mesurable, alors $E(X | \mathcal{B}) = X$.*
- (ii) *$E(E(X | \mathcal{B})) = E(X)$.*
- (iii) *Pour toute variable aléatoire Z $\mathcal{B}$ -mesurable, on a $E(ZE(X | \mathcal{B})) = E(ZX)$.*
- (iv) *Linéarité : $E(\lambda X + \mu Y | \mathcal{B}) = \lambda E(X | \mathcal{B}) + \mu E(Y | \mathcal{B})$.*
- (v) *Positivité : si $X \geq 0$, alors $E(X | \mathcal{B}) \geq 0$ (et alors l'égalité entraîne que X est identiquement nulle).*
- (vi) *Si $\mathcal{B}$ est plus fine que $\mathcal{A}$, alors $E(E(X | \mathcal{B}) | \mathcal{A}) = E(X | \mathcal{A})$.*
- (vii) *Si Z est $\mathcal{B}$ -mesurable, alors $E(ZX | \mathcal{B}) = ZE(X | \mathcal{B})$.*
- (viii) *Si X est indépendante¹ de $\mathcal{B}$, alors $E(X | \mathcal{B}) = E(X)$.*
- (ix) *Une variable aléatoire réelle X est indépendante de la tribu $\mathcal{B}$ si et seulement si :*

$$(\forall u \in \mathbb{R}) \quad E(e^{iuX} | \mathcal{B}) = E(e^{iuX})$$

(on rappelle que le membre de droite est la fonction caractéristique de X , elle caractérise la loi de X – c'est en quelque sorte la transformée de Fourier de la loi de X)

- (x) *$E(X | \mathcal{B})$ est l'unique variable aléatoire Y $\mathcal{B}$ -mesurable vérifiant la propriété suivante :*

$$(\forall B \in \mathcal{B}) \quad E(X \mathbb{1}_B) = E(Y \mathbb{1}_B)$$

- (xi) *Soit Z une variable aléatoire $\mathcal{B}$ -mesurable à valeurs dans un ensemble F . Soit X une variable quelconque à valeurs dans un ensemble E . Soit $H : E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables ; alors $H(X, Z)$ est une variable aléatoire. Notons*

$$\begin{aligned} K : \quad \Omega \times F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, z) &\longmapsto E(H(X, z) | \mathcal{B})(\omega) \end{aligned}$$

Alors, $(\forall \omega \in \Omega) \quad E(H(X, Z) | \mathcal{B})(\omega) = K(\omega, Z(\omega))$.

1. On dira qu'une variable X est indépendante d'une tribu $\mathcal{B}$ quand chaque événement de la forme $X = k$ est indépendant de chaque événement de $\mathcal{B}$.

3 Propriété de Markov

Définition 3.1 (chaîne de Markov) Soit E un ensemble fini de cardinal N appelé espace d'états, et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E . Pour tout n , on note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. Ces tribus sont de plus en plus fines, et on appelle $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration naturelle associée à la suite (X_n) . On dit que la suite (X_n) vérifie la propriété de Markov, ou qu'elle est une chaîne de Markov, lorsque, pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \mathbb{E}(f(X_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(f(X_{n+1}) \mid X_n)$$

Quand la suite (X_n) représente un processus aléatoire et que l'entier n représente une date, la propriété de Markov signifie que « le futur ne dépend du passé qu'à travers le présent ».

Remarque Posons $f = \mathbb{1}_{\{j\}}$. Les valeurs de l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{j\}}(X_{n+1}) \mid X_n)$ sur les atomes de la tribu $\sigma(X_n)$ sont les probabilités conditionnelles $p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$. Il est alors facile de voir que la propriété de Markov est équivalente à la propriété suivante :

$$(\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in E) \quad p(X_{n+1} = j \mid (X_0 = i_0) \cap \dots \cap (X_{n-1} = i_{n-1}) \cap (X_n = i)) = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Définition 3.2 (matrice stochastique) Soit (X_n) une chaîne de Markov. Si les probabilités conditionnelles $p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ ne dépendent pas de n , on dit que c'est une chaîne de Markov homogène. On lui associe alors une matrice carrée M dite matrice stochastique dont les coefficients sont :

$$M_{i,j} = p(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Il est aussi commode de représenter ces probabilités conditionnelles sur les arêtes d'un graphe orienté dont les nœuds sont les éléments de E .

Exemples Voir les exercices (problème des deux urnes, téléphone arabe, fortune du joueur).

Probabilité invariante Il est commode de représenter toute fonction $\mu : E \rightarrow \mathbb{R}$ par un vecteur-ligne dans $\mathbb{R}^N$:

$$(\mu(k))_{k \in E}$$

En particulier, notons μ_n la loi de probabilité de X_n , on assimile donc μ_n au vecteur-ligne suivant :

$$(p(X_n = k))_{k \in E}$$

On a alors (vérifiez-le) :

$$\mu_{n+1} = \mu_n M$$

Question intéressante : la suite de vecteurs $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Remarquons que, si tel est le cas, alors sa limite μ_∞ doit être une « loi de probabilité invariante » au sens où :

$$\mu_\infty = \mu_\infty M$$

La question de la convergence des chaînes de Markov est donc étroitement liée à celle de l'existence de probabilités invariantes. J'énoncerai ci-dessous trois théorèmes répondant à ces questions, sans les démontrer.

Théorème 3.1 Pour toute chaîne de Markov homogène de matrice stochastique M , il existe des lois de probabilités invariantes :

$$(\exists \mu_\infty \in \mathbb{R}^N) \quad \mu_\infty = \mu_\infty M, \quad \sum_k \mu_\infty(k) = 1 \text{ et } (\forall k) \mu_\infty(k) \geq 0$$

Définition 3.3 On dit qu'une chaîne de Markov est irréductible si tous les états communiquent, au sens où :

$$(\forall i, j \in E) \quad (\exists n \in \mathbb{N}) \quad p(X_n = j \mid X_0 = i) > 0$$

Théorème 3.2 Pour toute chaîne de Markov homogène irréductible, il existe une unique loi de probabilité invariante μ_∞ . De plus, $(\forall k) \mu_\infty(k) > 0$.

Définition 3.4 On montre facilement que toute valeur propre d'une matrice stochastique M est de module inférieur ou égal à 1. Si 1 est l'unique valeur propre de M de module 1, on dit que M est apériodique.

Théorème 3.3 Pour toute chaîne de Markov homogène irréductible apériodique, la loi de X_n converge vers l'unique loi de probabilité invariante μ_∞ .

Classification des états d'une chaîne de Markov Soit $y \in E$ un état. Quelque soit l'état d'une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ au temps 0, on peut s'intéresser au « premier temps de retour en y », c'est-à-dire à la variable aléatoire T_y définie par :

$$T_y = \inf\{n \geq 1 \mid X_n = y\}$$

Quand $(\forall n \geq 1) X_n \neq y$, on notera $T_y = \infty$.

Soit un état $x \in E$, notons

$$\rho_{xy} = p(T_y < \infty \mid X_0 = x)$$

On dira que l'état y est *récurrent* si $\rho_{yy} = 1$; sinon, on dira qu'il est *transitoire*. Il y a toujours au moins un état récurrent. Tous les états d'une chaîne irréductible sont récurrents.

Soit $C \subset E$ un ensemble d'états récurrents. On dira que C est *clos* s'il est impossible d'en sortir, au sens où $(\forall x \in C) (\forall y \notin C) \quad \rho_{xy} = 0$.

Il est alors possible de décomposer E en une réunion disjointe

$$E = E_T \cup C_1 \cup \dots \cup C_p$$

où E_T est l'ensemble des états transitoires, et les C_i sont des ensembles clos irréductibles.

4 Marchés financiers

Définition 4.1 Un marché financier est un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ muni d'une filtration croissante $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ (une suite de tribus de plus en plus fines), et d'une suite de vecteurs aléatoires

$$S_n = \begin{pmatrix} S_n^0 \\ S_n^1 \\ \vdots \\ S_n^d \end{pmatrix}$$

à valeurs dans $(\mathbb{R}_+^*)^{d+1}$, adaptée à la filtration, chaque variable aléatoire S_n^i étant $\mathcal{F}_n$ -mesurable et représentant le prix de l'actif i -ème du marché à la date n . L'actif 0-ème (S_n^0) est un actif sans risque, c'est-à-dire un placement sur un compte en banque au taux d'intérêt r , et $S_0^0 = 1$.

La valeur de la monnaie change au cours du temps, et pour comparer des prix à des instants différents on *actualise* les valeurs : pour posséder 1 € à la date n , il faut placer $\frac{1}{(1+r)^n}$ € à la date 0 sur un compte épargne au taux d'intérêt r . Dans la suite, on notera ce coefficient d'actualisation

$$\beta_n = \frac{1}{(1+r)^n}$$

Pour comparer les prix des actifs, on les exprime selon la valeur de la monnaie à la date 0. Le prix actualisé du i -ème actif sera alors noté :

$$\tilde{S}_n^i = \beta_n S_n^i$$

Définition 4.2 Une stratégie de gestion de portefeuille ϕ est une suite prévisible de vecteurs aléatoires

$$\phi_n = \begin{pmatrix} \phi_n^0 \\ \phi_n^1 \\ \vdots \\ \phi_n^d \end{pmatrix}$$

à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, c'est-à-dire telle que pour tout n , les ϕ_n^i sont des variables aléatoires $\mathcal{F}^{n-1}$ -mesurables.

Peu importe la valeur de ϕ_0 , on pose par convention $\phi_0 = \phi_1$. La valeur du portefeuille à la date n est

$$V_n(\phi) = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i = \langle \phi_n, S_n \rangle$$

Le fait que (ϕ_n) soit une suite *prévisible* signifie qu'à la date n , vous réorganisez votre portefeuille de composition ϕ_n en achetant et en revendant des actifs aux cours S_n , et vous décidez ainsi de la composition ϕ_{n+1} de votre portefeuille *au vu des cours passés et présents jusqu'à la date n incluse*. Puis le cours des actifs évolue et devient S_{n+1} à la date $(n+1)$. On a :

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = (\langle \phi_{n+1}, S_{n+1} \rangle - \langle \phi_{n+1}, S_n \rangle) + (\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle)$$

c'est-à-dire

$$\Delta V_{n+1}(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \Delta S_{n+1} \rangle + \langle \Delta \phi_{n+1}, S_n \rangle \quad (1)$$

Le terme de gauche de cette somme est la variation de la valeur du portefeuille due à la variation des cours des actifs à la date $(n+1)$, le terme de droite est la variation de la valeur du portefeuille due aux ventes, achats, apports extérieurs et consommation que vous effectuez à la date n , au cours S_n . Notez qu'on autorise $\phi_n^i < 0$: pour l'actif sans risque, cela signifie un emprunt au taux sans risque r , et pour les actifs risqués, cela signifie une *vente à découvert*.

Définition 4.3 Une stratégie autofinancée est une stratégie ϕ telle que $\langle \phi_{n+1}, S_n \rangle - \langle \phi_n, S_n \rangle = 0$ pour tout n .

Autrement dit, dans une stratégie autofinancée, apports extérieurs et consommation sont interdits. Le terme de droite s'annule alors dans l'équation 1, et on a :

$$V_n(\phi) = \langle \phi_0, S_0 \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \phi_k, \Delta S_k \rangle$$

Les valeurs actualisées vérifient une équation analogue à l'équation 1 :

$$\Delta \tilde{V}_{n+1}(\phi) = \langle \phi_{n+1}, \Delta \tilde{S}_{n+1} \rangle + \langle \Delta \phi_{n+1}, \tilde{S}_n \rangle \quad (2)$$

où il faut bien noter que $\Delta \tilde{S}_{n+1} = \beta_{n+1} S_{n+1} - \beta_n S_n$. Dans le cas d'une stratégie autofinancée, on a donc aussi

$$\tilde{V}_n(\phi) = \langle \phi_0, S_0 \rangle + \sum_{k=1}^n \langle \phi_k, \Delta \tilde{S}_k \rangle$$

mais la valeur actuelle de l'actif sans risque est constante, $\Delta \tilde{S}_k^0 = 0$ pour tout k ; on peut donc récrire l'équation plus simplement :

$$\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^n \phi_k^1 \Delta \tilde{S}_k^1 + \dots + \phi_k^d \Delta \tilde{S}_k^d$$

où l'on voit qu'une stratégie autofinancée est entièrement déterminée par la donnée de $V_0(\phi) \in \mathbb{R}$ et des N vecteurs

$$\begin{pmatrix} \phi_n^1 \\ \vdots \\ \phi_n^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

L'ensemble des stratégies autofinancées est donc un espace vectoriel de dimension $(Nd + 1)$.

Définition 4.4 Une stratégie autofinancée ϕ est dite admissible si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout n .

Définition 4.5 Une stratégie admissible ϕ est un arbitrage si $V_0(\phi) = 0$ et $p(V_N(\phi) > 0) > 0$.

Autrement dit, un arbitrage est une stratégie qui n'entraîne aucune perte (vous êtes sûr de toujours pouvoir liquider votre portefeuille sans perte) et qui présente des gains à la date N avec probabilité non nulle.

Définition 4.6 Un marché viable est un marché financier où n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Dans la pratique, un marché qui n'est pas viable tend à le devenir à cause de la loi de l'offre et de la demande : si le cours d'un actif est très bas, c'est-à-dire si l'on peut s'attendre, en l'achetant, à faire des profits à coup sûr sans prendre de risque, tout le monde va le faire, donc son cours va augmenter beaucoup et la situation ne durera pas...

5 Martingales et viabilité des marchés

Définition 5.1 Soit $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ une filtration croissante et (X_n) une suite adaptée de variables aléatoires à valeurs réelles.

- si $(\forall n) \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n$, on dit que (X_n) est une $\mathcal{F}_n$ -martingale
- si $(\forall n) \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \geq X_n$, on dit que (X_n) est une $\mathcal{F}_n$ -sous-martingale
- si $(\forall n) \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \leq X_n$, on dit que (X_n) est une $\mathcal{F}_n$ -sur-martingale

Remarquez que ces trois conditions dépendent simplement du signe de

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) - X_n &= \mathbb{E}(X_{n+1} - X_n | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(\Delta X_{n+1} | \mathcal{F}_n) \end{aligned}$$

Proposition 5.1 (i) La suite adaptée (X_n) est une $\mathcal{F}_n$ -martingale (resp. sous-martingale, sur-martingale) si et seulement si

$$(\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket) (\forall m \geq n) \quad \mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n) = X_n \text{ (resp. } \geq X_n, \leq X_n)$$

- (ii) Une combinaison linéaire de martingales est une martingale. Une combinaison linéaire à coefficients positifs de sous-martingales (resp. sur-martingales) est une sous-martingale (resp. sur-martingale).
- (iii) La suite (X_n) est une sous-martingale si et seulement si $(-X_n)$ est une sur-martingale.
- (iv) Soit ϕ une fonction convexe et (X_n) une martingale, alors $\phi(X_n)$ est une sous-martingale.
- (v) Si (X_n) est une martingale, on a $\mathbb{E}(X_N) = \mathbb{E}(X_0)$.

Définition 5.2 Soit (X_n) une suite adaptée à $(\mathcal{F}_n)$ et (U_n) une suite prévisible. La transformée de (X_n) par (U_n) est la suite notée $(U * X)_n$ et définie par :

$$(U * X)_n = U_0 X_0 + \sum_{k=1}^n U_k \Delta X_k$$

Autrement dit, $\Delta(U * X)_n = U_n \Delta X_n$.

Toute cette théorie s'étend aux dimensions supérieures. Par exemple, la suite de vecteurs aléatoires (S_n) à valeurs dans $(\mathcal{R}_+^*)^{d+1}$ vue dans la section précédente est une martingale si chaque composante S_n^i est une martingale. Si (ϕ_n) est une suite prévisible de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathcal{R}^{d+1}$, la transformée de la suite (S_n) par la suite (ϕ_n) est définie au moyen du produit scalaire :

$$\Delta(\phi * S)_n = \langle \phi_n, \Delta X_n \rangle$$

On a donc :

$$V_n(\phi) = (\phi * S)_n$$

Théorème 5.1 Si (X_n) une martingale et (U_n) une suite prévisible, alors $(U * X)_n$ est une martingale. Si (X_n) est une sous-martingale (resp. sur-martingale) et (U_n) une suite prévisible à valeurs positives, alors $(U * X)_n$ est une sous-martingale (resp. sur-martingale).

Théorème 5.2 Réciproquement, soit (X_n) une suite adaptée telle que pour tout suite prévisible (U_n) la transformée $(U * X)_n$ soit une martingale, alors (X_n) est une martingale.

Théorème 5.3 Un marché financier est viable si et seulement s'il existe une mesure de probabilité p^* (dite probabilité risque neutre) équivalente² à p et sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

2. c'est-à-dire que, comme p , la mesure p^* vérifie $(\forall \omega) p^*(\{\omega\}) > 0$.

Remarques

- Le fait que l'existence d'une probabilité risque neutre implique la viabilité du marché est une conséquence assez évidente des définitions et du théorème 5.1. En effet, supposons que $(\tilde{S}_n^{(d)})$ est une martingale, et soit ϕ une stratégie autofinancée telle que $V_0(\phi) = 0$ et $V_N(\phi) \geq 0$. Alors $\tilde{V}_n(\phi) = (\phi * \tilde{S})_n$ est une martingale donc $E(\tilde{V}_N(\phi)) = V_0(\phi) = 0$, et ceci implique (positivité de l'espérance) que $V_N(\phi)$ est identiquement nulle. La réciproque (cf. [1] pp. 18-19) est beaucoup plus subtile et repose sur le théorème de Hahn-Banach.
- On a vu que la viabilité des marchés était une hypothèse assez naturelle, renforcée par la loi de l'offre et de la demande. Sous cette hypothèse, et sous une certaine mesure de probabilité, les prix actualisés des actifs sont donc des martingales ; le théorème 5.1 implique qu'alors la valeur actualisée de tout portefeuille est elle-même une martingale. Ceci ne réjouira guère le spéculateur qui souhaiterait au contraire avoir une sous-martingale (c'est-à-dire des espérances futures supérieures à la valeur présente du portefeuille). On comprend là pourquoi les marchés financiers organisés pratiquent les arbitrages : en cas de dérive, l'auto-régulation de l'offre et de la demande permet alors le retour à la viabilité et donc l'impossibilité des stratégies d'arbitrages et de la spéculation.

6 Couverture et marchés complets

Soit un marché financier constitué d'un actif sans risque S_n^0 et d'un actif risqué S_n .

Définition 6.1 Une option européenne est une variable aléatoire positive $\mathcal{F}_N$ -mesurable h .

Autrement dit, on s'intéresse à une option européenne, dont la date d'échéance est égale à l'horizon N du marché, et sa valeur à cette date est h . Tout le problème est alors d'estimer le prix d'une telle option à la date 0.

Exemples Le *call européen* sur le sous-jacent S_n , de prix d'exercice K et d'échéance N est la variable $h = (S_N - K)_+ = \max(0, S_N - K)$. Cette option donne le droit à son possesseur d'acheter l'actif S_n à l'échéance au prix K . Elle n'aura de valeur que si $S_N > K$, et sa valeur est alors $(S_N - K)$: il achète l'actif S_N au prix K , quitte à le revendre immédiatement au prix S_N en empochant la différence $(S_N - K)$.

Le *put européen* sur le sous-jacent S_n , de prix d'exercice K et d'échéance N est la variable $h = (K - S_N)_+$.

Un *put européen asiatique* sur le sous-jacent S_n , de prix d'exercice K et d'échéance N est une variable aléatoire de la forme $h = (K - U)_+$ où

$$U = \frac{\sum_{k \in I} S_k}{\text{card} I}$$

avec $I \subset \llbracket 0, N \rrbracket$.

En pratique Les options sont des instruments de couverture du risque de variation du cours de l'actif sous-jacent S_n (voir exemple étudié au début de l'année). Si, à la date 0, quelqu'un me vend une option h , il s'engage alors à me fournir la somme h à l'échéance (date N). À charge à ce vendeur de constituer un portefeuille qui, à l'échéance, lui permettra de me payer. On appelle cela un « portefeuille de couverture » ou une « stratégie de réplication ». Plus précisément :

Définition 6.2 Une stratégie de réplication est une stratégie ϕ admissible telle que $V_N(\phi) = h$.

Remarque Si le marché est viable, l'existence d'une stratégie ϕ autofinancée telle que $V_N(\phi) = h$ entraîne son admissibilité.

Proposition 6.1 Soit h une option répliquable par une stratégie ϕ dans un marché viable. Alors si l'on adjoint au marché un nouvel actif $H_n = V_n(\phi)$, le marché reste viable. On dit que H_n est un « prix excluant l'arbitrage ».

Autrement dit, pour que le vendeur de l'option puisse constituer son portefeuille de couverture à la date 0, il aura tout intérêt à vendre son option h à un prix $\geq V_0(\phi)$. Les arbitrages et la loi de l'offre et de la demande feront même tendre ce prix vers $V_0(\phi)$.

Démonstration. Sous p^* , la suite $(V_n(\phi))_n$ est une martingale car c'est une transformée de martingales...

Remarque Soit h une option répliquable par une stratégie ϕ dans un marché viable, alors son prix excluant l'arbitrage est, à la date n :

$$V_n(\phi) = \beta_{N-n} E^*(h \mid \mathcal{F}_N)$$

Ce prix ne dépend donc ni de la stratégie de couverture ϕ , ni de la tendance du marché (puisque l'espérance E^* est calculée sous la probabilité p^* sous laquelle les cours des actifs sont, en moyenne, constants). Il y a là un paradoxe. S'il est davantage probable que le cours de l'actif croisse, alors j'ai l'impression de devoir vendre mes calls plus chers ; mais en réalité il n'en est rien, car je me couvre contre la hausse justement en achetant de cet actif, ce qui compense le désavantage que je risque de subir...

Encore faut-il qu'il existe une stratégie de réplication !

Définition 6.3 Un marché est dit complet si toute option européenne est répliquable.

Théorème 6.1 Un marché viable est complet si et seulement s'il existe une unique probabilité risque neutre p^* sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

Démonstration : pour l'instant, on se contentera de montrer la seconde implication ($\Rightarrow$). Soit une quelconque variable aléatoire réelle positive h , et ϕ sa couverture. Soit p^* et p^{**} deux probabilités risque neutre. Sous chacune, $(\tilde{S}^n)$ est une martingale, et on a donc :

$$V_0(\phi) = \beta_N E^*(h) = \beta_N E^{**}(h)$$

Toutes les variables aléatoires réelles positives ont donc même espérance sous p^* et sous p^{**} . Ceci implique que ces deux mesures de probabilités sont égales.

Quelques arbitrages Soit h une option répliquable, vendue à un prix $H_0 > V_0(\phi)$. Voici une stratégie d'arbitrage. Je « simule » une telle option en me constituant un tel portefeuille ϕ , cela me coûte $V_0(\phi)$ à la date 0. Je peux alors vendre cette option, et je la vends au prix du marché, c'est-à-dire H_0 . J'empoche la différence $H_0 - V_0(\phi)$ que je place sur un compte épargne au taux sans risque. À l'échéance, soit mon acheteur exerce l'option et je suis tenu de lui donner $h = V_N(\phi)$ (c'est facile, il me suffit de revendre mon portefeuille), soit il n'exerce pas parce que $h = V_N(\phi) = 0$. Dans les deux cas, j'ai bien gagné $\beta_N(H_0 - V_0(\phi))$; il s'agit donc d'un arbitrage.

Soit h une option répliquable, vendue à un prix $H_0 < V_0(\phi)$. Voici une stratégie d'arbitrage. J'achète immédiatement une telle option. Pour ce faire, je « vends à découvert » les actifs constituant la stratégie de réplication ϕ , au prix $V_0(\phi)$. J'empoche la différence $(V_0(\phi) - H_0)$ que je place sur un compte épargne. À l'échéance, soit j'exerce mon option et je touche $h = V_N(\phi)$, ce qui me permet d'honorer mes emprunts et ventes à découvert, soit $h = V_N(\phi) = 0$ et je suis quitte de toute dette. Dans les deux cas, j'ai bien gagné $\beta_N(H_0 - V_0(\phi))$; il s'agit donc d'un arbitrage.

Même sans connaître de stratégie de réplication, il y a une relation entre call, put et actif sous-jacent qui peut donner lieu à des arbitrages : c'est la *relation de parité call-put*

$$P + S_0 = \beta_N K + C$$

où C et P sont les prix respectifs (à la date 0) d'un call et d'un put européens de sous-jacent S_n , d'échéance N et de prix d'exercice K . Supposons par exemple $P + S_0 > \beta_N K + C$. Voici un arbitrage. Je simule un put en vendant à découvert un actif risqué S_0 et en achetant un call. Je vends ce put au prix du marché, c'est-à-dire P . J'empoche la différence $P + S_0 - C > \beta_N K$,

et je place cette somme sur un compte épargne. J'attends l'échéance. Si $S_N > K$, j'exerce mon call et j'achète au prix K l'actif que je dois (puisque je l'ai vendu à découvert) ; il restera donc $\left(\frac{P + S_0 - C}{\beta_N} - K\right)$ sur mon compte épargne. Si au contraire $S_N < K$, j'achèterai l'actif que je dois au prix S_N , et je devrais encore honorer mon contrat avec l'acheteur du put en lui donnant $(K - S_N)$. Là aussi, il restera $\left(\frac{P + S_0 - C}{\beta_N} - K\right)$ sur mon compte épargne ; il s'agit donc d'un arbitrage.

7 Cox-Ross-Rubinstein

Soit un marché financier constitué d'un actif sans risque au taux r et d'un actif risqué (S_n) défini par :

$$\begin{cases} S_0 = s_0 \\ S_{n+1} = T_{n+1}S_n \end{cases}$$

où les T_n sont des variables aléatoires à deux valeurs $(1+a) < (1+b)$, pas forcément indépendantes ni équidistribuées (quand elles le sont, (S_n) est une chaîne de Markov homogène et $(\ln S_n)$ une marche aléatoire).

$$(\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket) \quad T_n \in \{1+a, 1+b\}$$

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$$

$(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle engendrée par la suite (T_n) :

$$\begin{cases} \mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\} \\ \mathcal{F}_n = \sigma(T_1, T_2, \dots, T_n) \end{cases}$$

Proposition 7.1 *Si $r \notin]a, b[$, alors il existe un arbitrage.*

Démonstration. Supposons par exemple que $r \geq b$. Alors je vends à découvert un actif à la date 0 :

$$\phi_0 = -1, \quad \phi_0^0 = s_0$$

Puis j'attends la date N sans rien faire.

$$V_N(\phi) = s_0(1+r)^N - S_N \geq 0$$

et il arrive même, avec probabilité non nulle, que $V_N(\phi) > 0$. En effet,

$$S_N = s_0 T_1 T_2 \dots T_N \leq s_0(1+b)^N \leq s_0(1+r)^N;$$

l'égalité implique que tous les T_n valent $(1+b)$, mais il doit arriver, avec probabilité non nulle, que certains des T_n valent $(1+a)$, car $(\forall \omega) p(\{\omega\}) > 0$.

Autre démonstration. Supposons qu'il n'existe pas d'arbitrage, alors d'après le théorème 5.3, il existe une probabilité p^* sous laquelle $(\tilde{S}_n)$ est une martingale, donc :

$$\frac{1}{1+r} S_n E^*(T_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = S_n$$

c'est-à-dire :

$$(1+a)p^*(T_{n+1} = 1+a \mid \mathcal{F}_n) + (1+b)p^*(T_{n+1} = 1+b \mid \mathcal{F}_n) = 1+r \quad (3)$$

On a alors $1+a < 1+r < 1+b$.

Existence d'une probabilité p^* dans Cox-Ross-Rubinstein Il suffit de trouver une mesure de probabilité vérifiant l'équation (3) ci-dessus. Autrement dit, le couple $(p^*(T_{n+1} = 1+a \mid \mathcal{F}_n), p^*(T_{n+1} = 1+b \mid \mathcal{F}_n))$ doit être solution du système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (1+a)x + (1+b)y = (1+r) \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Ce système a une unique solution donnée par les formules de Cramer. Il faut donc que :

$$p^*(T_{n+1} = 1 + a \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} r & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{b - r}{b - a}$$

$$p^*(T_{n+1} = 1 + b \mid \mathcal{F}_n) = \frac{\begin{vmatrix} a & r \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{r - a}{b - a}$$

Quand $r \in]a, b[$, ces deux nombres tombent dans l'intervalle $[0, 1]$, et cela définit entièrement la probabilité p^* . En particulier, on voit que la loi de (T_n) sous p^* est la même pour tout n , et que T_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$: la suite (S_n) est donc une chaîne de Markov homogène. Dans ces conditions, le modèle de Cox-Ross-Rubinstein définit un marché viable.

Couverture effective ϕ d'une option européenne h À la date n , notons H_n le prix de h excluant l'arbitrage. On va déterminer les H_n, ϕ_n^0, ϕ_n par induction descendante en partant de l'échéance $n = N$ de l'option. Il est commode de représenter Ω par un arbre binaire : les différents chemins menant de la racine à un nœud de niveau n représentent alors les différents atomes de $\mathcal{F}_n$. Considérons un atome de $\mathcal{F}_{n-1}$. À la date suivante, cet atome se scinde en deux atomes de $\mathcal{F}_n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{n-1} = s \\ H_{n-1} = c \\ \phi_n^0 = x \\ \phi_n = y \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\frac{r-a}{b-a}} \left\{ \begin{array}{l} S_n = (1+b)s \\ H_n = c_+ \end{array} \right. \\ \xrightarrow{\frac{b-r}{b-a}} \left\{ \begin{array}{l} S_n = (1+a)s \\ H_n = c_- \end{array} \right. \end{array}$$

Le fait qu'aux dates $(n-1)$ et n , le portefeuille ϕ couvre l'option h s'exprime par les trois équations linéaires suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1+r)^{n-1}x + sy = c \\ (1+r)^nx + (1+b)sy = c_+ \\ (1+r)^nx + (1+a)sy = c_- \end{array} \right.$$

Les deux dernières suffisent à déterminer y :

$$y = \frac{c_+ - c_-}{(1+b)s - (1+a)s}$$

Ce quotient est souvent appelé *ratio de couverture*.

On peut aussi exprimer y comme solution des deux premières équations et l'écrire alors sous la forme

$$y = \frac{\beta_n c_+ - \beta_{n-1} c}{\beta_n (1+b)s - \beta_{n-1} s}$$

Enfin, la première et la dernière équations donnent :

$$y = \frac{\beta_n c_- - \beta_{n-1} c}{\beta_n (1+a)s - \beta_{n-1} s}$$

On a donc en tout cas

$$\phi_n = \frac{\tilde{H}_n - \tilde{H}_{n-1}}{\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n-1}} = \frac{\Delta \tilde{H}_n}{\Delta \tilde{S}_n},$$

autre forme du ratio de couverture qui fait beaucoup penser à un quotient différentiel.

Formule explicite de prix d'un call européen sous Cox-Ross-Rubinstein Le prix excluant l'arbitrage à la date n est :

$$\begin{aligned} H_n &= \beta_{N-n} \mathbb{E}^* ((S_N - K)_+ | \mathcal{F}_n) \\ &= \beta_{N-n} \mathbb{E}^* ((S_n T_{n+1} T_{n+2} \dots T_N - K)_+ | \mathcal{F}_n) \\ &= \beta_{N-n} \sum_{k=0}^{N-n} \left((S_n (1+a)^k (1+b)^{N-n-k} - K)_+ \times C_{N-n}^k \left(\frac{b-r}{b-a} \right)^k \left(\frac{r-a}{b-a} \right)^{N-n-k} \right) \end{aligned}$$

8 Enveloppe de Snell et options américaines

Définition 8.1 Soit (Z_n) une suite adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. L'enveloppe de Snell de la suite (Z_n) est la suite (U_n) définie par :

$$\begin{aligned} U_N &= Z_N \\ U_n &= Z_n \vee E(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \quad (0 \leq n < N) \end{aligned}$$

Proposition 8.1 L'enveloppe de Snell (U_n) de la suite (Z_n) est la plus petite $\mathcal{F}_n$ -surmartingale majorant (Z_n) .

Démonstration. Le fait que (U_n) soit une surmartingale majorant (Z_n) résulte immédiatement de sa définition. Montrons que c'est la plus petite. Soit (Y_n) une autre surmartingale majorant (Z_n) . Par récurrence descendante, supposons que $Y_{n+1} \geq U_{n+1}$. Alors $Y_n \geq E(Y_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq E(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$. Comme d'autre part $Y_n \geq Z_n$, on a bien

$$Y_n \geq Z_n \vee E(U_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = U_n$$

Application Une *option américaine* dans un marché financier (S_n^0, S_n) est une suite Z_n adaptée. Par exemple, un *call américain* est une suite de la forme

$$Z_n = (S_n - K)_+$$

Pour tout n , Z_n est le profit que permet l'exercice de l'option à la date n : contrairement aux options européennes, on n'est pas obligé d'attendre l'échéance pour exercer une option américaine. Un raisonnement par récurrence descendante permet de calculer la valeur d'une telle option dans un marché complet. Supposons qu'elle vaille U_n à la date n . C'est le prix de la couverture de l'option à cette date. À la date $(n-1)$, si le possesseur de l'option exerce, il empoche Z_{n-1} , et le vendeur de l'option doit donc être prêt à lui payer cette somme ; mais s'il n'exerce pas, le vendeur doit avoir un portefeuille de couverture dont la valeur à la date n sera au moins égale à U_n . Un tel portefeuille, actualisé, est une martingale sous p^* , donc sa valeur à la date $(n-1)$ sera au moins

$$E^*(\beta_n U_n \mid \mathcal{F}_{n-1})$$

Pour que le vendeur ne soit jamais pris à dépourvu, il faut donc que

$$U_{n-1} = Z_{n-1} \vee \frac{E^*(U_n \mid \mathcal{F}_{n-1})}{1+r}$$

On a alors

$$\tilde{U}_{n-1} = \tilde{Z}_{n-1} \vee E^*(\tilde{U}_n \mid \mathcal{F}_{n-1}),$$

donc $(\tilde{U}_n)$ est l'enveloppe de Snell de $(\tilde{Z}_n)$.

Remarque Le *call américain* est en fait identique au *call européen* ! On va le démontrer par récurrence. Supposons qu'ils ont même valeur pour les dates $> n$. La convexité de la fonction $\tilde{S}_N \mapsto (\tilde{S}_N - \beta_N K)_+$ entraîne l'inégalité suivante :

$$E^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E^*(\tilde{C}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E^*((\tilde{S}_N - \beta_N K)_+ \mid \mathcal{F}_n) \geq \left(E^*(\tilde{S}_N \mid \mathcal{F}_n) - \beta_N K \right)_+ = (\tilde{S}_n - \beta_N K)_+$$

On a d'autre part $\beta_N \leq \beta_n$ donc :

$$(\tilde{S}_n - \beta_N K)_+ \geq (\tilde{S}_n - \beta_n K)_+ = \tilde{Z}_n$$

Finalement, $E^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq \tilde{Z}_n$ donc $\tilde{U}_n = E^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = E^*(\tilde{C}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \tilde{C}_n$, ainsi les deux options ont déjà même valeur à la date n , ce qu'il fallait démontrer.

Quand faut-il exercer une option américaine ? Il ne faut surtout pas exercer tant que $\tilde{Z}_n < \tilde{U}_n$. Dans le besoin, on a mieux à faire : vendre l'option à son prix U_n . Dès que $\tilde{Z}_n$ touche son enveloppe de Snell $\tilde{U}_n$, on peut exercer, mais il peut être dommageable d'attendre trop longtemps. La *décomposition de Doob* de la surmartingale $(\tilde{U}_n)$ nous permettra de déterminer la dernière date optimale d'exercice d'une option américaine.

Décomposition de Doob Dans un marché complet, la valeur actualisée d'un portefeuille de couverture d'une option américaine est une martingale. Notons-la $\tilde{M}_n$. Pour qu'un tel portefeuille suffise à couvrir l'option, il faut que $(\forall n) \tilde{M}_n \geq \tilde{U}_n$. Ecrivons donc $\tilde{M}_n = \tilde{U}_n + \tilde{A}_n$, avec $\tilde{A}_n \geq 0$. Supposons connue la valeur d'un tel portefeuille jusqu'à la date n , et $\tilde{M}_0 = \tilde{U}_0$. Pour que $(\tilde{M}_n)$ soit une martingale, il faut et il suffit que

$$(\forall n) \quad \mathbb{E}^*(\tilde{M}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n,$$

soit

$$(\forall n) \quad \mathbb{E}^*(\tilde{A}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \tilde{M}_n - \mathbb{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n).$$

Cette quantité est positive car la suite $(\tilde{U}_n)$ est une surmartingale. Il suffit donc de poser

$$\tilde{A}_{n+1} = \tilde{M}_n - \mathbb{E}^*(\tilde{U}_{n+1} \mid \mathcal{F}_n)$$

$$\tilde{M}_{n+1} = \tilde{U}_{n+1} + \tilde{A}_{n+1}$$

Cette construction par récurrence des suites $(\tilde{M}_n)$ et $(\tilde{A}_n)$ s'appelle *décomposition de Doob* de la surmartingale $(\tilde{U}_n)$.

Proposition 8.2 Dans la décomposition de Doob de la surmartingale $(\tilde{U}_n)$, la suite $(\tilde{A}_n)$ est une suite positive, prévisible et croissante.

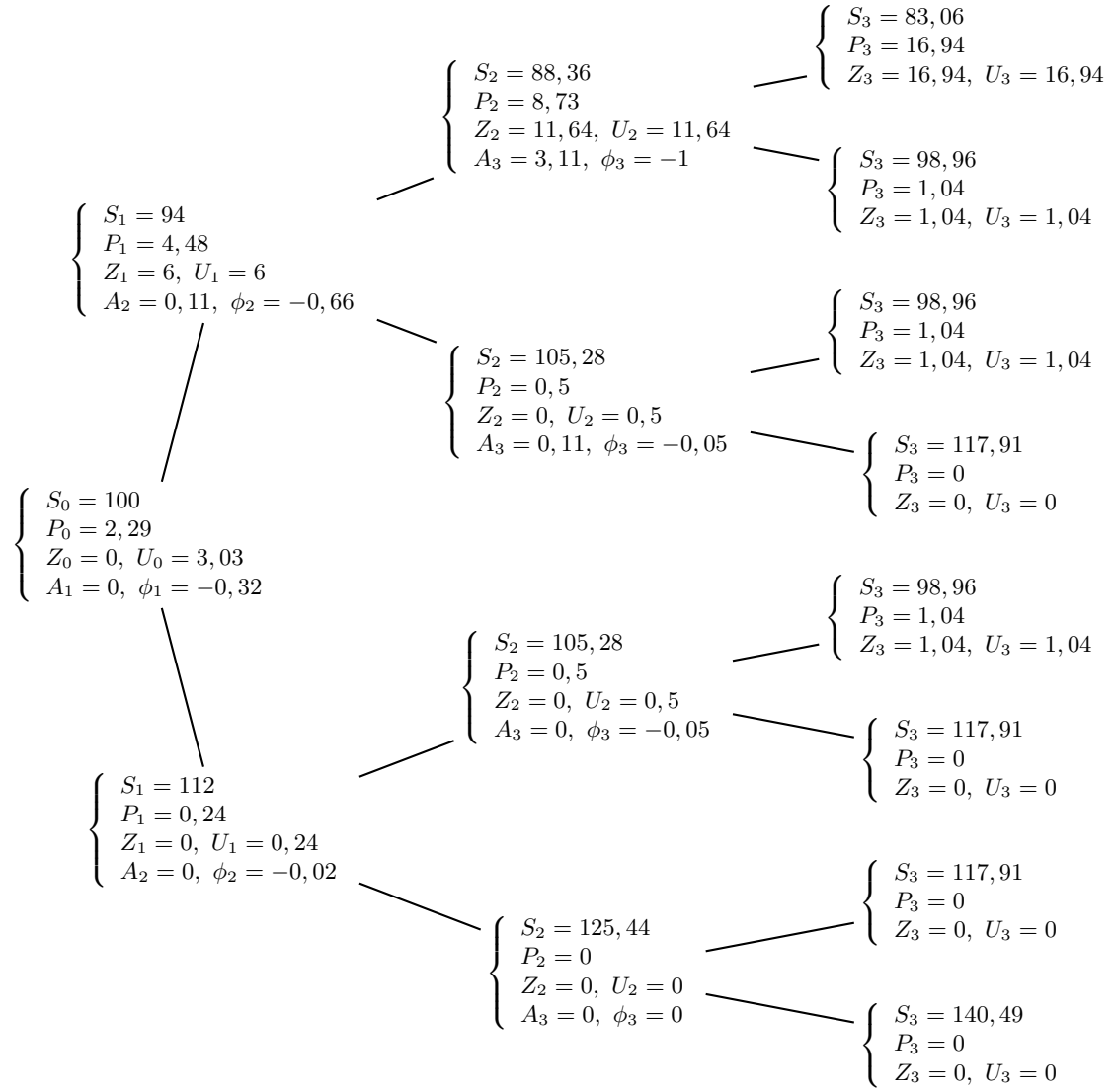
Démonstration. De par sa définition, $\tilde{A}_{n+1}$ est clairement $\mathcal{F}_n$ -mesurable. On a vu qu'elle était positive car $(\tilde{U}_n)$ est une surmartingale. De plus

$$\tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n = \mathbb{E}^*(\tilde{A}_{n+1} - \tilde{A}_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*(\tilde{M}_{n+1} - \tilde{M}_n \mid \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}^*(\tilde{U}_{n+1} - \tilde{U}_n \mid \mathcal{F}_n)$$

et cette quantité est aussi positive, donc $(\tilde{A}_n)$ est croissante.

Dernière date optimale d'exercice Tant que $\tilde{A}_{n+1}$ est nul, on peut attendre : l'option se comporte comme la martingale $\tilde{M}_n$. En revanche, dès que $\tilde{A}_{n+1} > 0$ (et on peut le prévoir à la date n) il faut exercer ou bien vendre cette option, quitte à constituer immédiatement le portefeuille de valeur $\tilde{M}_n$ qui majorera toutes les valeurs ultérieures de l'option.

Exemple On considère un *put américain* de prix d'exercice $K = 100$, d'échéance $N = 3$, sur un actif sous-jacent obéissant au modèle de Cox-Ross-Rubinstein avec $S_0 = 100$, $a = -6\%$, $b = 12\%$, et le taux sans risque $r = 3\%$. Outre Z_n , U_n , A_n , on calculera la quantité d'actif sous-jacent ϕ_n entrant dans la composition du portefeuille de couverture de valeur M_n (par la méthode du *ratio de couverture*). Enfin, on calculera aussi la valeur du *put* européen de mêmes paramètres pour comparer ces deux options. *Attention* : pour les options européennes, on pouvait représenter Ω par un « arbre binaire recombinaison », mais non pour les options américaines (car les suites A_n , M_n ne sont pas construites par récurrence descendante) et la complexité des algorithmes s'en ressent.



Références

- [1] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. ellipses, Paris, 1997.