

## Mathématiques financières

Nom et prénom de l'étudiant :

Classe : M1 IF

Date : 08/01/2011.

Documents et calculatrices interdits.

Nombre de pages du sujet : 2

**Problème** Soit  $N, k \in \mathbb{N}$ . Jacques possède 10 € et décide de jouer  $N$  fois de suite à pile ou face contre un collègue très riche. La pièce utilisée n'est pas parfaitement équilibrée, la probabilité de tomber sur pile est  $\frac{2}{5}$ , mais Jacques ne le sait pas. A chaque lancer, tant qu'il a encore de l'argent, il mise 1 € sur pile. Il espère ainsi gagner  $k$  € (c'est-à-dire atteindre une fortune totale de  $10+k$  €), après quoi il arrêtera de miser.

- a) On note  $X_n$  la fortune de Jacques après  $n$  lancers, et  $X_0 = 10$ . Montrer que  $(X_n)$  est une chaîne de Markov, et en déterminer la matrice stochastique.
- b) Si Jacques parvient effectivement à gagner  $k$  €, pour la première fois, au  $n$ -ème lancer, on note  $T = n$ . Si au contraire il n'y est pas parvenu au terme des  $N$  lancers, on note  $T = +\infty$ . Autrement dit,  $T$  est une variable aléatoire que l'on peut définir ainsi :

$$T = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n = 10 + k\}$$

Soit  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Montrer que :

$$(\forall a \in \llbracket 0, 10+k \rrbracket) \quad p(T \leq n+1 \mid X_1 = a) = p(T \leq n \mid X_0 = a)$$

Puis montrer que :

$$(\forall a \in \llbracket 1, 9+k \rrbracket) \quad p(T \leq n+1 \mid X_0 = a) = \frac{2}{5}p(T \leq n \mid X_0 = a+1) + \frac{3}{5}p(T \leq n \mid X_0 = a-1)$$

- c) Pour  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ ,  $p(T \leq n \mid X_0 = a)$  ne dépend donc pas de  $N$ . Pour un tel  $n$ , notons :

$$f_n(a) = p(T \leq n \mid X_0 = a)$$

Afin d'étudier la probabilité de gagner  $k$  € lorsque  $N$  est grand, on va faire varier  $N$ . Pour tout  $a \in \llbracket 0, 10+k \rrbracket$ , on a ainsi défini une suite  $(f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ , et la question précédente montre que :

$$(*) \quad f_{n+1}(a) = \frac{2}{5}f_n(a+1) + \frac{3}{5}f_n(a-1)$$

Pour tout  $a$ , la suite  $(f_n(a))$  est une suite croissante majorée par 1, donc elle a une limite finie

$$p_a = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a)$$

Si l'on fait tendre  $n$  vers l'infini dans l'équation (\*), on obtient à la limite :

$$p_a = \frac{2}{5}p_{a+1} + \frac{3}{5}p_{a-1}$$

Montrer que  $p_0 = 0$  et  $p_{10+k} = 1$ . En déduire que

$$p_a = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^a - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1}$$

- d) En s'aidant de la question précédente, calculer une valeur approchée de la probabilité  $p$  de gagner  $k \in$  (c'est-à-dire d'atteindre une fortune totale de  $10 + k \in$ ) lorsque  $N$  est très grand.
- e) On suppose  $N$  assez grand, tel que cette limite  $p$  soit une bonne approximation au moins pour les petites valeurs de  $k$ . Déterminer la plus grande valeur de  $k$  telle que  $p > 0,5$ .
- f) On pose désormais  $k = 1$ . On note  $(\mathcal{F}_n)$  la filtration naturelle engendrée par la suite  $(X_n)$ . Soit  $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ . Calculer :

$$E(X_{n+1} - X_n \mid \mathcal{F}_n)$$

(on exprimera le résultat en fonction de l'indicatrice  $\mathbb{1}_{X_n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket}$ ). En déduire que

$$E(X_{n+1} - 10) = E(X_n - 10) - \frac{1}{5}p(X_n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket)$$

Pour tout  $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ , on pose

$$u_n = p(X_n \in \llbracket 1, 10 \rrbracket)$$

$$v_n = E(X_n - 10)$$

On remarque que ces deux quantités ne dépendent pas de  $N$ . Le but de cette question est de calculer l'espérance de gain de Jacques au terme des  $N$  lancers, pour  $N$  grand. On va donc faire varier  $N$ . On a ainsi défini deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(v_n)$  est décroissante et minorée par  $(-10)$  donc elle a une limite  $\ell \in \mathbb{R}$ . En déduire les deux limites suivantes :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p(X_N \in \llbracket 1, 10 \rrbracket) = 0$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p(X_N = 0) + p(X_N = 11) = 1$$

Puis montrer que :

$$p(X_N = 11) = p(T \leq N)$$

Supposons  $N$  assez grand pour qu'on ait  $p(X_N \in \llbracket 1, 10 \rrbracket) \simeq 0$ . Calculer alors le gain espéré  $E(X_N - 10)$ .

# D.E. Mathématiques Financières

a)  $p = 2/5$      $q = 3/5$

$$(*) \quad P(X_{n+1} = i | X_n) = P(X_{n+1} = i | X_n, X_{n-1}, \dots, X_0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i \neq 0 \\ i \neq 10+k \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} P(X_{n+1} = i+1 | X_n = i) = 2/5 \\ P(X_{n+1} = i-1 | X_n = i) = 3/5 \end{array} \right.$$

Si  $i=0$   $P(X_{n+1}=0 | X_n=1) = 1$

$$i = 10 + k \quad P(X_{n+1} = 10 + k \mid X_n = i) = 1.$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

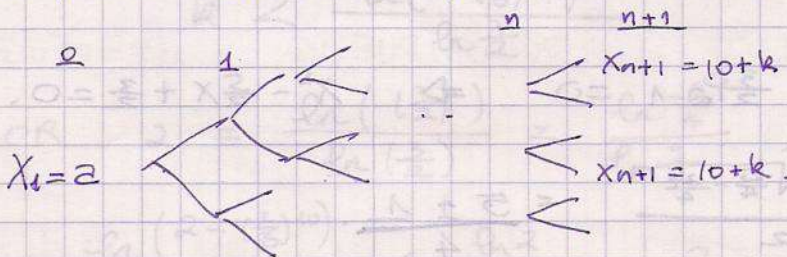
(Cor on column)

\* 
$$p(X_{n+1}=i | X_n=j_n, X_{n-1}=j_{n-1}, X_{n-2}=j_{n-2}, \dots, X_1=j_1, X_0=j_0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & i=j_{n+1} \\ \frac{1}{2} & i=j_{n-1} \\ 0 & \text{sinon} \\ 1 & i=j_n=0 \end{cases}$$

donc  $p(X_{n+1})$  ne dépend que de  $X_n$ .

$$b). [T \leq n] = [T = n \text{ ou } T = n-1 \text{ ou } T = n-2 \text{ ou } \dots \text{ ou } T = 0]$$
$$= [X_n = 10 + k]$$

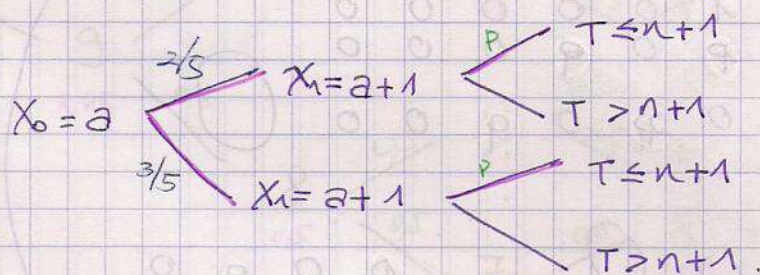
$$\Rightarrow p(T \leq n | X_0 = a) = p(X_n = 10 + k | X_0 = a) \neq p(X_{n+1} = 10 + k | X_1 = a).$$



$$\begin{aligned}
p(X_{n+1}=10+k \mid X_1=a) &= \sum_{i_2, i_3, \dots, i_n} p(X_{n+1}=10+k, X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_2=i_2 \mid X_1=a) \\
&= \sum p(X_{n+1}=10+k \mid X_n=i_n) p(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}) \dots p(X_2=i_2 \mid X_1=a) \\
&= p(X_n=10+k \mid X_0=a) \\
&= \sum Q_{in, 10+k}, Q_{i_{n-1}, i_n} \dots Q_{a, i_2} \\
&= (Q^n)_{a, 10+k}.
\end{aligned}$$

• montrer que  $\forall a \in [1, 3+k]$

$$\begin{aligned}
P(T \leq n+1 \mid X_0=a) &= \frac{2}{5} P(T \leq n+1 \mid X_0=a+1) + \frac{3}{5} P(T \leq n+1 \mid X_0=a-1) \\
&= \frac{2}{5} P(T \leq n+1 \mid X_1=a+1) + \frac{3}{5} P(T \leq n+1 \mid X_1=a-1) \\
&\quad \underbrace{P(X_1=a+1 \mid X_0=a)} \quad \underbrace{P(X_1=a-1 \mid X_0=a)}
\end{aligned}$$



$$c) \quad P_a = \frac{2}{5} P_{a+1} + \frac{3}{5} P_{a-1}.$$

$$P_{a+1} = \frac{5}{2} P_a - \frac{3}{2} P_{a-1}.$$

$$\begin{pmatrix} P_{a+1} \\ P_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} P_{a+1} - \frac{3}{2} P_{a-1} \\ P_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_a \\ P_{a-1} \end{pmatrix}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} P_a \\ P_{a-1} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} \begin{pmatrix} P_{a+1} \\ P_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \\ & \mu \end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix} P_a \\ P_{a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^a & \\ & \mu^a \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} P_a \\ P_{a-1} \end{pmatrix}$$

$$P_{a+1} - \frac{5}{2} P_a + \frac{3}{2} P_{a-1} = 0 \quad \Rightarrow \quad X^2 - \frac{5}{2} X + \frac{3}{2} = 0.$$

$$X = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}}}{2} = \frac{5 \pm 1}{4}.$$

$$P_a = \frac{A4^a}{4} + \frac{B6^a}{4} = A1^a + B\left(\frac{3}{2}\right)^a$$

$$P_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p(T \leq n | X_0 = 0) = 0 \text{ car dès la date 0, le jeu s'arrête sans gain.}$$

$$P_{10+k} = ?$$

$$P_0 = A1^0 + B\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$P_{10+k} = \lim_{n \rightarrow \infty} p(T \leq n | X_0 = 10+k) = 1 \text{ car on a } 10+k, \text{ donc on a atteint notre objectif.}$$

$$A\left(1^{10+k} - \frac{3}{2}^{10+k}\right)$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{1^{10+k} - \left(\frac{3}{2}\right)^{10+k}}$$

$$P_a = A\left(1^a - \left(\frac{3}{2}\right)^a\right) = \frac{1^a - \left(\frac{3}{2}\right)^a}{1^{10+k} - \left(\frac{3}{2}\right)^{10+k}} = \frac{1^a (1 - \left(\frac{3}{2}\right)^a)}{1^{10+k} (1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10+k})} = \frac{1^{a-10-k} (1 - \left(\frac{3}{2}\right)^a)}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10+k}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^a - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1}$$

$$d) P_{10} = \lim_{N \rightarrow \infty} p(T \leq N | X_0 = a)$$

$X_N = 10+k$

$$\text{D'où } P_{10} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1}$$

$$e) \quad \phi_{10} > 0,5$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{3}{2}\right)^{10+k} - 1} > 0,5$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} > 0,5 \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^k - 1 \right] + 1$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{10} > 0,5 \left(\frac{3}{2}\right)^{10} \left(\frac{3}{2}\right)^k + 0,5$$

$$2 \left(\frac{3}{2}\right)^{10} - 1 > \left(\frac{3}{2}\right)^{10+k}$$

$$2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10} > \left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$k < \frac{\ln(2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10})}{\ln \frac{3}{2}}$$

$$\text{OR } 2 = \frac{\ln(1 \left(\frac{3}{2}\right)^2)}{\ln \left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\ln \frac{9}{4}}{\ln \frac{3}{2}} > \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}}$$

$$\frac{\ln(2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{10})}{\ln \frac{3}{2}} < \frac{\ln 2}{\ln \frac{3}{2}} < 2$$

$$\text{done } k = 1$$

$$E(X_{n+1} - X_n | F_n) = (p-q) 1_{X_n \in [1, 10]}$$

$$= \left(\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right) 1_{X_n \in [1, 10]} = -\frac{1}{5} 1_{X_n \in [1, 10]}$$

$$E(X_{n+1} - 10) = E(X_n - 10) - \frac{1}{5} P(X_n \in [1, 10])$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(X_n \in [1, 10]) = 0$$

Car en  $\infty$ , il y a 2 possibilités :  
 - soit Jacq a tout perdu  $X_n = 0$   
 - soit Jacq a tout gagné  $X_n = 11$  ( $k=1$ )

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} p(X_N = 0) + p(X_N = 11) = 1$$

(cf réponse précédente).

$$T = \min \{N \in \mathbb{N} \mid X_N = 11\}$$

$\uparrow$   
 $10+k$  sachant que  $k=1$

$$\text{Donc } p(X_N = 11) = p(T \leq N)$$

\* On cherche la différence, l'indicatrice exclut le cas  $n \notin [1, 10]$

$$\text{si on a } 8 \in \begin{matrix} p \rightarrow 9 \in \\ q \rightarrow 7 \in \end{matrix}$$

$$\text{OR si on a } 11 \in \begin{matrix} p \rightarrow 11 \in \\ q \rightarrow 11 \in \end{matrix}$$

$$\Rightarrow (9-8)p + (7-8)q = p-q \Rightarrow 0$$

Question supplémentaire:  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$  ?

$$\mathcal{F}_0 = \{X_0=10, \emptyset\}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{X_1=9, X_1=11, \Omega, \emptyset\}$$

$A \cup B \cup C$

$$\mathcal{F}_2 = \{X_2=8, (X_1=9 \text{ et } X_2=10), (X_1=11 \text{ et } X_2=11), A \cup B, A \cup C, B \cup C, \Omega, \emptyset\}$$

A

B

C

$$\mathcal{F}_3 = \{X_3=7, (X_2=8 \text{ et } X_3=9), (X_2=9 \text{ et } X_2=10 \text{ et } X_3=9), (X_1=9 \text{ et } X_2=10 \text{ et } X_3=11)$$

( $X_1=11$ ), DUE, DUF, ..., DUEUF, DUEUG, ..., DUEUFUG, DUEUFUH, ...,  $\Omega, \emptyset\}$

11 - 11

correction de la page précédente :

$$\begin{array}{ccccc} E(X_{n+1} - 10) & = & E(X_n - 10) & - & \frac{1}{5} p(X_n \in [1, 10]) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ V_{n+1} & & V_n & & U_n. \end{array}$$

$(V_n) \downarrow$  et  $V_n \geq -10 \quad (\forall n)$ .

donc  $(V_n)$  a une limite,  $(U_n)$  aussi !

$$V_{n+1} - V_n = -\frac{1}{5} U_n.$$

$$\lim V_{n+1} - \lim V_n = -\frac{1}{5} \lim U_n.$$

$$\text{donc } \lim U_n = 0.$$

$$E(X_N - 10) \approx (0-10)p(X_N=0) + (11-10)p(X_N=11)$$

$$\approx -10(1-p(X_N=11)) + p(X_N=11)$$

$$\approx -10 + 11p(X_N=11)$$

$$\approx -10 + 11p(T \leq N \mid X_0=10).$$

$$\approx -10 + 11p_{10}$$

$$\approx -10 + 11 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11} - 1}$$

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{11} - 1} \times \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{10}} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}} \quad \text{OR} \quad \frac{2}{3} < 1 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{10} < 1.$$

$$\approx \frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow E(X_N - 10) \approx -10 + 11 \frac{2}{3}.$$

$$\approx -3 + \frac{1}{3}$$

$$\approx -2,67.$$

C'est normal qu'on trouve une valeur négative, car

$$p < q.$$

### Question supplémentaire:

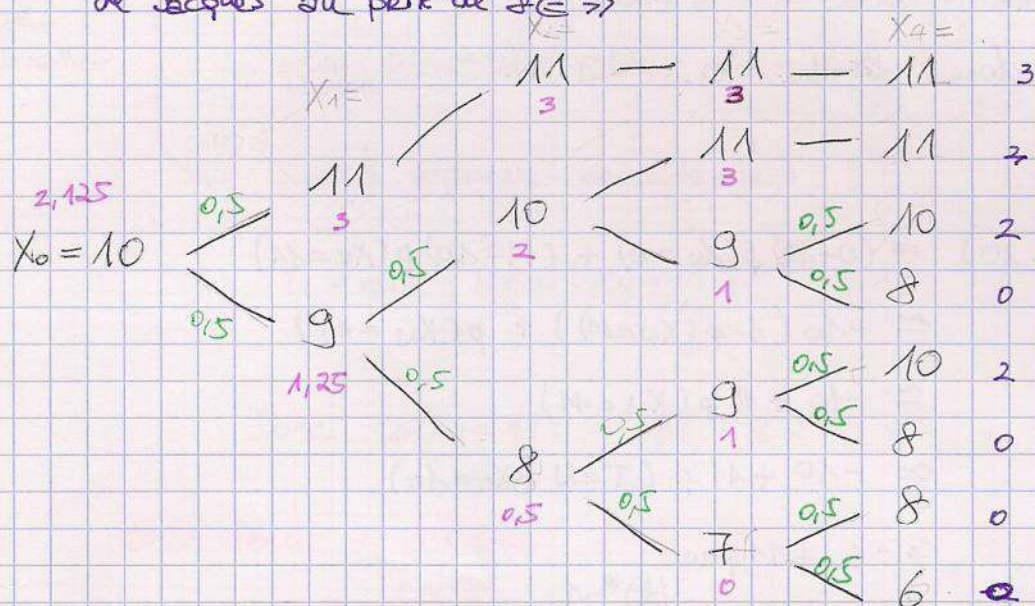
Jacques, mon ami d'enfance, m'a promis qu'il accepterait de me vendre sa fortune après la 4<sup>e</sup> partie, au prix de 8€, si je le souhaite. (Taux sans risque = 0).

Mais Jacques ne jouera ces 4 parties qu'après-demain. OR j'ai besoin d'argent tout-de-suite (à savoir pourquoi)

Je décide donc d'offrir à Claude le privilège que Jacques m'a accordé à condition qu'il veuille bien me dépanner tout de suite de  $X$  €.

⇒ c'est un call européen

«tu me donnes  $X$  €, et après-demain, je te rendrai tu veux la fortune de Jacques au prix de 8€»



à la fin des 4 parties, je devrais donner à Claude  $(X_4 - 8)$ .

on veut que  $pC_u + qC_d = C$  et  $p + q = 1$ .

$$\begin{matrix} p & \rightarrow & C_u \\ C & \rightarrow & C \\ q & \rightarrow & C_d \end{matrix}$$

$$\begin{cases} pC_u + qC_d = C \\ p + q = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow p = q = 0.5$$

$$\Rightarrow X = 2,125 \text{ €}$$