

$$\begin{aligned}
 M^nf &= E(f(X_n) | F_{n-1} | \dots | F_0) = E(f(X_n) | F_0) \\
 &= E(f(X_n)) = E(\dots | X_i) \\
 &= E(\dots | F_i)
 \end{aligned}$$

$M^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$

}

timide

audacieux.

Approche audacieuse

à l'instant  $n$ , on mise  $\min(N - X_n, X_n)$  fortune de casino à l'instant  $n$   
nb total de dollars dans le monde

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} - X_n | X_n) &= p \min(N - X_n, X_n) - q \min(N - X_n, X_n) \\ &= (p - q) \min(N - X_n, X_n). \end{aligned}$$

$$p(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i = 0 \text{ ou } N. \\ p & \text{si } j = i + \min(N - i, i) \\ q & \text{si } j = i - \min(N - i, i) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Approche timide

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & & \\ p & 0 & q & 0 & & \\ 0 & p & 0 & q & & \\ & & & & & \\ 0 & & & & p & 0 & q \\ 0 & & & & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

N+1 colonnes

$$E(X_n) = (M^n f)_{n+1}$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$$

$$(M^n)_{ij} = p(X_n = j | X_0 = i - 1)$$

$$(M^n)_{i+1,j} = p(X_n = j - 1)$$

$$E(X_{n+1} - X_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } X_n = 0 \text{ ou } N. \\ p - q & \text{sinon} \end{cases}$$

$$= (p - q) \mathbb{1}_{X_n \notin \{0, N\}}$$

comparaison:

$$E(X_{n+1} - X_n | X_n)_{\text{audacieux}} = E(X_{n+1} - X_n | X_n) \times \underbrace{\min(X_n, N - X_n)}_{\geq 1} \mathbb{1}_{X_n \notin \{0, N\}}$$

donc si  $p \geq q$ , préférer l'approche audacieuse.  
 si  $p \leq q$ , préférer l'approche timide

$T = \min \{0 \leq n \leq N \mid X_n = N\}$  = première date à laquelle on a tout gagné  
 -  $+\infty$  si ça n'arrive jamais.

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ p & 0 & q \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & p & 0 & q \end{pmatrix}$$

$$(A+B)^n = \left( \sum_{k=0}^{n-1} B^k A \right) + B^n$$

$$n=2k, i \leq N$$

$$(B^{2k})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i=1 \text{ ou } N+1. \\ \text{si } 2 \leq i \leq N & \begin{cases} 0 & \text{si } i, j \text{ de parité différente} \\ \frac{j-i}{2} + k & \frac{i-j}{2} + k \left( C_{2k}^{\frac{j-i}{2} + k} + \varepsilon \right) \\ p & q \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{33}{pq} (20 + \textcolor{red}{-15}) & 0 & \frac{42}{pp} (15 - \textcolor{red}{6}) & 0 & \frac{5}{pq} (6 - \textcolor{red}{1}) & 0 & \dots \\ \frac{24}{pq} (15 - \textcolor{red}{25}) & 0 & \frac{33}{pq} (20 + \textcolor{red}{6}) & 0 & \frac{4}{p} p^2 (15 + \textcolor{red}{-1}) & \dots \end{matrix}$$

$$= \begin{cases} \text{si } j=1 & -2 C_{2k-1}^{\frac{j-i}{2} + k} \\ \text{si } 1 < j \leq 2k+2-i & - C_{2k}^{\frac{j-i}{2} + k+1} \\ \text{si } n+1 > j \Rightarrow 2N-2k-i+2 & - C_{2k}^{\frac{j-i}{2} - N + k - 1} \\ \text{si } j = N+1 & -2 C_{2k-1}^{\frac{j-i}{2} + k} \\ \text{si non} & \end{cases}$$

Si  $r = \frac{N}{2}$ , calculons l'expérience timide jusqu'à la date  $n < r$ )  $1(X_n \notin [0, N]) = 1$ .

$$E(X_{n+1} - X_n | X_n) = (p-q) \times 1$$

$$E(X_n - X_0) = E\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_{k+1} - X_k\right) = \sum E(E(X_{k+1} - X_k | X_k))$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (p-q) = n(p-q)$$

### Exercice 8.

$$p(X_{k+1} = j | X_k = i) = \begin{cases} (1-p) & \text{si } j = i \\ \frac{i}{n} p & \text{si } j = i-1 \\ \frac{n-i}{n} p & \text{si } j = i+1. \end{cases}$$

$$f(X_k) = \mathbb{1}_{\{X_k \geq S\}}$$

$$E(f(X_{k+1}) | \mathcal{F}_k) = (1-p)f(X_k) + \frac{i}{n} p f(X_{k-1}) + \frac{n-X_k}{n} p f(X_{k+1})$$

$$= \begin{cases} \text{si } X_k \geq S+1, & 1 \\ \text{si } X_k = S, & 1-p + \frac{n-X_k}{n} p = 1 - \frac{X_k p}{n} \\ \text{si } X_k = S-1, & \frac{n-X_k}{n} p = p - \frac{X_k p}{n}, \text{ et 0 sinon} \end{cases}$$

cf. cours 5-17 -

## Martingales

**Exercice 1** Soit  $(Y_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées avec  $p(Y_i = 1) = p = 1 - p(Y_i = -1)$ . Soit  $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$  et  $S_0 = 0$ . Montrer que les suites  $(W_n)$  et  $(M_n)$  définies par

VII, 155

$$W_n = S_n - (2p-1)n, \quad W_0, \quad M_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}, \quad M_0 = 1$$

sont des martingales par rapport à la filtration naturelle.

cf. cours  
5-7

**Exercice 2** Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$  et  $p \in ]0, 1[$ . On considère la suite  $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$  définie par récurrence :

$$S_0 = 100$$

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n a & \text{avec la probabilité } p \\ S_n / a & \text{avec la probabilité } 1 - p \end{cases}$$

1. Pour  $a = 1,05$  et  $p = 1/3$ ,  $(S_n)$  est-elle une martingale? une sous-martingale? une sur-martingale?
2. Si  $a = 1,05$ , pour quelle(s) valeur(s) de  $p$  la suite  $(S_n)$  est-elle une martingale?
3. Si  $a = 1,05$ , pour quelle(s) valeur(s) de  $p$  la suite  $(\ln S_n)$  est-elle une martingale? Dans ce cas, possède-t-elle la propriété de la représentation prévisible?

**Exercice 3** Soit  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  des variables aléatoires indépendantes, chacune d'espérance nulle et de variance  $V(\epsilon_i) = \sigma_i^2$ . Posons

$$S_n = \sum_{i=1}^n \epsilon_i, \quad T_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

Montrez que  $S_n^2 - T_n^2$  est une martingale.

**Exercice 4** Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, p, (\mathcal{F}_n))$  un espace filtré et  $Y$  une variable aléatoire. On pose

$$X_n = E(Y | \mathcal{F}_n)$$

Montrer que  $(X_n)$  est une martingale.

**Exercice 5** Si  $(X_n)$  et  $(Y_n)$  sont des sous-martingales, montrer que  $(\max(X_n, Y_n))$  est une sous-martingale.

## Options

**Exercice 1** Dans un marché financier avec un actif risqué  $(S_n)_{0 \leq n \leq N}$ , soit  $\psi(S_N)$  une variable aléatoire fonction de  $S_N$  (en particulier, une telle variable est  $\mathcal{F}_N$ -mesurable). Si  $\psi(S_N)$  représente la valeur à la date  $N$  d'un certain actif financier, on appelle *profil de gain* de  $\psi(S_N)$  la courbe d'équation  $S_N \mapsto \psi(S_N)$ . Représentez le profil de gain d'un *put* européen sur l'actif  $(S_n)$  au prix d'exercice  $K$ , si :

1. Vous êtes en « position longue » (c'est-à-dire que vous achetez le *put*).
2. Vous êtes en « position courte » (c'est-à-dire que vous vendez le *put*).

Puis représentez le profil de gain d'un portefeuille constitué d'un *call* et d'un *put* à l'europpéenne de mêmes date d'exercice  $N$  et prix d'exercice  $K$ , et portant sur le même actif  $(S_n)$ .

**Exercice 2** Le taux sans risque à un an est de 4 % et l'indice boursier Durablex est de  $S_0 = 100$ . Un *call* européen sur l'indice Durablex au prix d'exercice de  $K = 104$  est coté 8 % de la valeur actuelle de l'indice. Vous souhaitez investir un million d'euros sur un an ( $N = 1$ ). Vous prévoyez d'investir suffisamment de cet argent dans des bons du Trésor sans risque pour récupérer au moins votre million d'euros dans un an, et le solde sera investi dans l'achat de *calls* sur Durablex.

1. On suppose que vous pouvez investir dans des fractions d'options. On appelle *taux de rentabilité* d'un portefeuille  $\phi$  le taux :

$$\frac{V_N(\phi) - V_0(\phi)}{V_0(\phi)}$$

Calculez le taux de rentabilité de votre portefeuille. C'est une fonction de  $S_N$ ; tracez son profil de gain en plaçant l'indice Durablex sur l'axe horizontal et le taux de rentabilité sur l'axe vertical. Quelle est la pente du segment à droite de la valeur 104 de l'indice ?

2. Si vous pensez qu'il y a une probabilité de 0,5 que l'indice Durablex soit supérieur de 12 % dans un an, une probabilité de 0,25 qu'il ait progressé de 40 %, et une probabilité de 0,25 qu'il ait baissé de 20 %, quelle est la loi de probabilité de la rentabilité de votre portefeuille ?

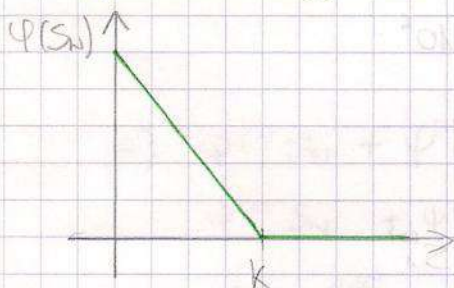
**Exercice 3** Un *actif synthétique* est un portefeuille répliquant un actif donné. La relation de parité *put-call* permet non seulement de déduire la valeur d'un des quatre actifs (l'actif sans risque, l'actif sous-jacent, le *put* et le *call*) à partir des trois autres, mais elle peut aussi être utilisée comme une « recette » pour créer un actif synthétique à partir des trois autres.

1. Montrez comment on peut bâtir une action synthétique avec un *put*, un *call* et un actif sans risque.
2. Montrez comment on peut répliquer un actif sans risque à un an à la valeur nominale de 100 euros avec une action, un *put* et un *call*.

# Options

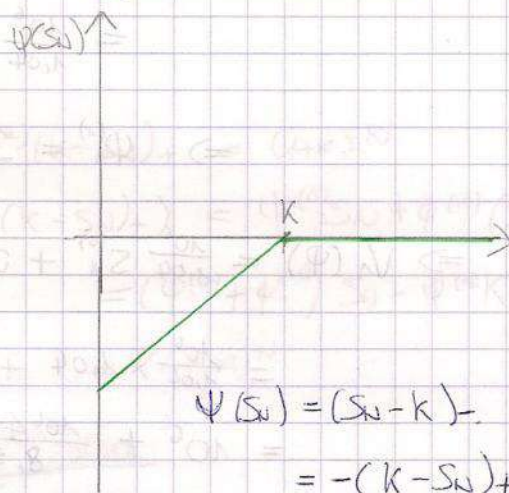
## Exercice 1

• position longue



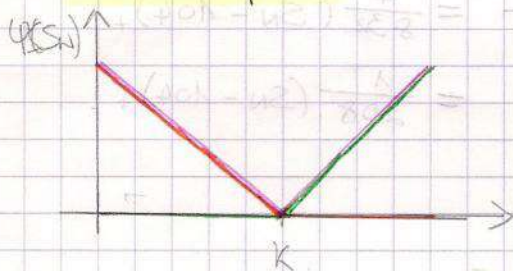
$$\begin{aligned}\Psi(S_N) &= (-S_N + K)_+ \\ &= (K - S_N)_+\end{aligned}$$

• position courte



$$\begin{aligned}\Psi(S_N) &= (S_N - K)_- \\ &= -(K - S_N)_+\end{aligned}$$

• call et put



call  
put

$$\underline{\Psi(S_N)} = (K - S_N)_+ + (S_N - K)_+$$

## Exercice 2

1) bon du trésor

$$S_0^{(0)} = 1$$

$$S_1^{(0)} = 1,04$$

indice Durablex

$$S_0^{(1)} = 100$$

$$S_1^{(1)} = ?$$

call sur l'indice (d'écarter de 100)  
prix d'ex 100)

$$S_0^{(2)} = 8 \in$$

$$S_1^{(2)} = (S_1^{(1)} - 104)_+$$

$$V_1(\varphi) = \varphi_1^{(0)} S_1^{(0)} + \varphi_1^{(1)} S_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} S_1^{(2)}$$

$$V_0(\varphi) = 10^6 \quad (1 \text{ millions d'euros})$$

$$V_0(\varphi) = \varphi_0^{(0)} S_0^{(0)} + \varphi_0^{(1)} S_0^{(1)} + \varphi_0^{(2)} S_0^{(2)}$$

$$\Rightarrow \text{il faut que } \varphi_1^{(0)} S_1^{(0)} = 10^6 \Leftrightarrow \varphi_1^{(0)} = \frac{10^6}{1,04}$$

$$V_1(\varphi) = \underbrace{\psi_1^{(0)} S_1^{(0)}}_{\frac{10^6}{1,04}} + \underbrace{\psi_2^{(1)} S_1^{(1)}}_0 + \psi_2^{(2)} S_1^{(2)}$$

$$\begin{aligned} V_0(\varphi) &= 10^6 = \psi_0^{(0)} S_0^{(0)} + \psi_0^{(1)} S_0^{(1)} + \psi_0^{(2)} S_0^{(2)} \\ &= \psi_1^{(0)} S_0^{(0)} + \psi_1^{(2)} S_0^{(2)} \\ &= \frac{10^6}{1,04} + 8 \psi_1^{(2)} = 10^6 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi_1^{(2)} = \frac{10^6 - \frac{10^6}{1,04}}{8}$$

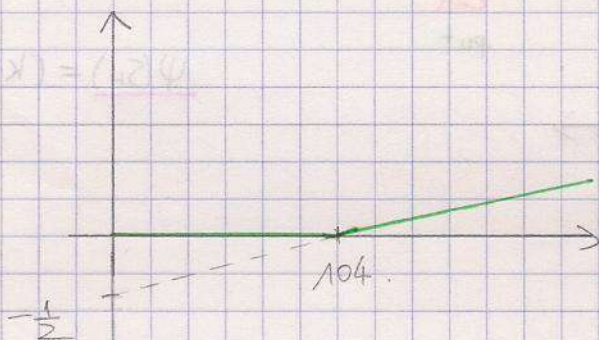
$$\Rightarrow V_1(\varphi) = \frac{10^6}{1,04} S_1^{(0)} + 0 + \frac{10^6 - \frac{10^6}{1,04}}{8} S_1^{(2)}$$

$$= \frac{10^6}{1,04} \times 1,04 + \frac{10^6 - \frac{10^6}{1,04}}{8} S_1^{(2)}$$

$$= 10^6 + \frac{40000}{8,32} S_1^{(2)}$$

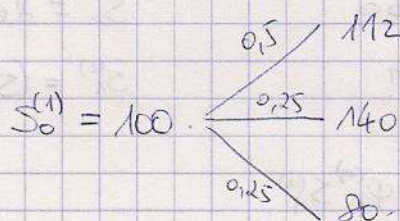
$$\frac{V_1(\varphi) - V_0(\varphi)}{V_0(\varphi)} = \frac{40000 S_1^{(2)}}{8\,320\,000} = \frac{4}{832} (S_N - 104)_+.$$

$$= \frac{1}{208} (S_N - 104)_+.$$



$$\frac{1}{208} (112 - 104) = \frac{8}{208} = \frac{1}{26}$$

2)



$$p\left(\frac{1}{208} (S_N - 104)_+ = \frac{1}{26}\right) = 0,5$$

$$p\left(\frac{1}{208} (S_N - 104)_+ = \frac{3}{52}\right) = 0,25$$

$$p\left(\frac{1}{208} (S_N - 104)_+ = 0\right) = 0,25$$

$$\frac{1}{26} \times 0,5 + \frac{3}{52} \times 0,25 + 0 \times 0,25$$

$$= \frac{3,25}{52}$$

### Exercise 3

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \psi^{(0)}(1+R)^N + \overset{+1}{\psi^{(1)}}(S_N - K)_+ + \overset{-1}{\psi^{(2)}}(K - S_N)_+ = S_N \\
 & = \psi^{(0)}(1+R)^N + \underbrace{(S_N - K)_+ - (K - S_N)_+}_{= S_N - K} = \psi^{(0)}(1+R)^N + S_N - K
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \psi^{(0)}S_N + \psi^{(1)}(S_N - K)_+ + \psi^{(2)}(K - S_N)_+ = (1+R)^N \\
 & \psi^{(0)}S_N + \psi^{(1)}((S_N - K)_+ - (K - S_N)_+) = \psi^{(0)}S_N + \psi^{(1)}(S_N - K) \\
 & \text{avec } \psi^{(2)} = -\psi^{(1)} \qquad \qquad \qquad = (\psi^{(0)} + \psi^{(1)})S_N - \psi^{(1)}K \\
 & \psi^{(1)} = -\psi^{(0)} \qquad \qquad \qquad = (1+R)^N
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \psi^{(0)} = \frac{100}{K}$$