

$$\pi_{X_{n+1} | X_1, X_2, \dots, X_n} = \pi_{X_{n+1} | X_n}$$

$$\rightarrow \{ \cdot = p(X_{n+1} = j | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q & 0 & p & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \quad \leftarrow i\text{ème ligne}$$

$$p(X_{n+1} = j | X_n = 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$p(X_{n+1} = j | X_n = n) = \begin{cases} 1 & \text{si } j=n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad N \rightarrow \text{fortune de casino}$$

Supposons connue la loi de probabilité de X_k (fortune à la date k)

$$(p(X_k=0) \ p(X_k=1) \ \dots \ p(X_k=n)) \quad M = (\dots \underset{\substack{\uparrow \\ j\text{ème colonne}}}{p(X_k=j-1)+q p(X_k=j+1)} \dots)$$

$$p(X_{k+1}=j | X_k=j-1) \cdot p(X_k=j-1) + p(X_k=j | X_k=j+1) \cdot p(X_k=j+1)$$

Théorème

Si je représente π_{X_k} par le vecteur-ligne $(p(X_k=0) \ \dots \ p(X_k=n))$

$$\text{dors } \pi_{X_{k+1}} = \pi_{X_k} M$$

$$\text{Donc } \pi_{X_k} = \pi_{X_0} M^k$$

$$X_0 = R$$

$$\pi_{X_0} = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0) \quad \uparrow \text{1ère colonne}$$

$$\pi_{X_n} = \pi_{X_0} M^n$$

$$i \mapsto E(f(X_{n+1}) | X_n = i) \quad E(X_n) ?$$

$$f: i \mapsto E(X_n | X_{n-1} = i)$$

$$M^n f = E(f(X_n) | X_{n-1} \dots X_0)$$

$$M^2 f = M(Mf) = (i \mapsto E(Mf(X_{n+1}) | X_n))$$

$$= (i \mapsto E(E(f(X_{n+2}) | X_{n+1}) | X_n))$$

$$f: (i \mapsto i)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$$

$$E(E(X|A) | B)$$

Lois discrètes, $E(X)$, $V(X)$, conditionnement.

Exercice 1 Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et pertes occasionnées par cette pratique. Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à α . Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude. Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i -ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + \dots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X , puis calculer $E(X)$ et $p(X \leq 2)$.
2. Soit Z le gain algébrique (c'est-à-dire positif en cas de gain et négatif en cas de perte) réalisé par le fraudeur. Remarquer que Z est fonction affine de X et en déduire son espérance.
3. Remarquer que $p(X \leq 2)$ est une fonction de α , soit $f(\alpha)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Résoudre par approximation l'équation

$$f(\alpha) = 0,01$$

En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.

Exercice 2 ^{v.171}Au bridge, le jeu compte cinquante-deux cartes, quatre « couleurs » (trèfle, pique, cœur, carreau) pour chacune des treize figures (as, roi, dame, valet, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10). On constitue une « main » en tirant successivement treize cartes. On s'intéresse au nombre de cartes d'un « atout » (c'est-à-dire d'une « couleur ») fixé à l'avance, mettons par exemple, les carreaux.

1. On constitue une main comme on vient de l'expliquer. On note X le nombre de cartes de la couleur « carreau ». Montrer que, pour $0 \leq k \leq 13$,

$$p(X = k) = \frac{C_{13}^k C_{39}^{13-k}}{C_{52}^{13}}$$

Montrer qu'alors, si $k + 1 \leq 13$, on a la formule de récurrence :

$$p(X = k + 1) = \frac{(13 - k)^2}{(k + 1)(27 + k)} p(X = k)$$

Calculer explicitement $p(X = 0)$.

2. On réalise 3400 fois le choix d'une main de bridge. Quelle est la fréquence théorique des valeurs 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 à 13, du nombre de « carreaux » pour ces 3400 épreuves ?

Exercice 3 Soit X une variable aléatoire réelle positive (et on suppose que $E(X) > 0$). Soit $\lambda > 0$. On définit la variable aléatoire Y ainsi :

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lambda E(X) & \text{si } X(\omega) \geq \lambda E(X) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que $E(Y) \leq E(X)$, puis que :

$$E(Y) = p(X \geq \lambda E(X)) \lambda E(X)$$

En déduire que (« inégalité de Markov ») :

$$p(X \geq \lambda E(X)) \leq \frac{1}{\lambda}$$

Soit à présent une autre variable aléatoire réelle Z . Utiliser l'inégalité de Markov pour majorer $p((Z - E(Z))^2 \geq \lambda V(Z))$. En déduire que, pour tout $\epsilon > 0$, on a (« inégalité de Bienaymé-Tchebychev ») :

$$p(|Z - E(Z)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(Z)}{\epsilon^2}$$

Exercice 4 En phase finale d'un jeu télévisé, il y a une voiture à gagner. Le présentateur montre trois portes, derrière une porte il y a la voiture et derrière les deux autres un cochon. Il demande au candidat de choisir une porte. Le présentateur ouvre alors l'une des deux autres portes ; il y a un cochon derrière. Il reste donc deux portes derrière lesquelles la voiture puisse être. Le candidat a-t-il intérêt à conserver son choix ou bien devrait-il au contraire changer d'avis et ouvrir l'autre porte ?

Exercice 5 On joue n fois à un jeu de pile ou face biaisé ; le $k^{\text{ème}}$ coup est représenté par une variable aléatoire X_k de Bernoulli vérifiant $p(X_k = 1) = \alpha$; la suite de variables aléatoires $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ est supposée indépendante. Si $p \leq n$, $S_p = \sum_{k=1}^p X_k$ représente le nombre de piles tombés au cours des p premiers coups. Montrer que la loi de S_p est la loi binomiale de paramètres (α, p) , et que sa loi conditionnelle sachant S_n est une loi hypergéométrique dont on précisera les paramètres. Calculer l'espérance conditionnelle sachant S_n .

Exercice 6 Soit S_0 une constante, $0 < d < u$ et X_n une suite de variables indépendantes identiquement distribuées à valeurs dans $\{u, d\}$ telle que $p(X_n = u) = p$. On considère la suite $(S_n)_{n \geq 1}$, définie par $S_n = X_n S_{n-1}$ pour $n \geq 1$ qui est un modèle d'évolution d'un actif financier. Soit $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(X_1)$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(X_1, X_2)$.

1. Montrer que $\mathcal{F}(S_2) \neq \mathcal{F}_2$.
2. Calculer $E(S_2 | \mathcal{F}_1)$ et $E(S_2 | \mathcal{F}_0)$ et vérifier que $E(E(S_2 | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_0) = E(S_2)$.
3. Si $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, donner une formule pour $E(S_n | \mathcal{F}_k)$ pour tout $k \leq n$.

Exercice 7 Deux joueurs possédant initialement des fortunes de r et $n - r$ dollars respectivement (r et n sont des entiers positifs tels que $r < n$), misent et jouent jusqu'à la ruine de l'un d'eux. Le deuxième joueur représente le croupier tandis que le premier joueur détermine la mise. Il gagne sa mise avec probabilité p ($0 < p < 1$) ou la perd avec probabilité $q = 1 - p$, et ce, indépendamment de l'histoire du jeu. Les seules mises possibles sont des multiples d'un dollar et il n'y a pas d'emprunt possible. Etudions deux stratégies populaires :

1. L'approche *audacieuse* consiste pour le premier joueur à miser à chaque tour le minimum entre sa fortune personnelle et le montant requis pour sa victoire ;
2. L'approche *timide* consiste pour le premier joueur à miser un euro à chaque tour.

On note X_n la fortune du premier joueur après le $n^{\text{ème}}$ jeu. Pour chacune des deux stratégies, montrer que la suite (X_n) est une chaîne de Markov. Comparer les deux stratégies en calculant des espérances.

Exercice 8 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et de n boules numérotées de 1 à n , réparties initialement entre U_1 et U_2 . On procède à des expériences selon le déroulement suivant : on choisit un nombre au hasard dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, la boule dont le numéro a été tiré est alors changée d'urne avec la probabilité p ($p \in]0, 1[$), et maintenue dans la même urne avec la probabilité $1 - p$.

On répète cette expérience N fois et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après la réalisation de la $k^{\text{ème}}$ expérience. Soit $(\mathcal{F}_k)$ la filtration naturelle associée à la suite (X_k) .

Après chaque tirage, le joueur gagne un euro si le nombre de boules contenues dans U_1 dépasse un certain seuil s ($1 \leq s \leq n$).

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer $p(X_{k+1} = i \mid X_k = j)$.
2. Montrer que le gain au $k^{\text{ème}}$ tirage est $f(X_k) = \mathbb{1}_{X_k \geq s}$.
3. Calculer $E(f(X_{k+1}) \mid \mathcal{F}_k)$.

$\mathcal{F}_k$ filtration naturelle associée à X_k

$$\Rightarrow \mathcal{F}_k = \mathcal{F}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_k)$$

Exercice 6.

$$1) (X_1=u, X_2=d) \in \mathcal{F}(X_1, X_2)$$

$$\mathcal{F}(X_1, X_2) = \{ \emptyset, X_1 X_2 = u^2, X_1 X_2 = ud, X_1 X_2 = d^2, (X_1 X_2 = u^2) \cup (X_1 X_2 = ud), (X_1 X_2 = u^2) \cup (X_1 X_2 = d^2), (X_1 X_2 = ud) \cup (X_1 X_2 = d^2), \Omega \}$$

$$\text{l'atome } [X_1 X_2 = ud] = (X_1 = u \text{ et } X_2 = d) \cup (X_1 = d \text{ et } X_2 = u).$$

Donc $(X_1 = u \text{ et } X_2 = d)$ ne peut pas s'écrire comme réunion d'atomes de $\mathcal{F}(X_1, X_2)$ donc n'appartient pas à $\mathcal{F}(X_1, X_2)$.

$$2) \bullet E(S_2 | \mathcal{F}(X_1)) = E(X_1 X_2 | \mathcal{F}(X_1))$$

$$= X_1 E(X_2 | \mathcal{F}(X_1)) = X_1 E(X_2) \quad \text{car } E(X_2) = up + d(1-p)$$

$$= X_1 (up + d(1-p))$$

$$= \begin{cases} u^2 p + ud(1-p) & \text{avec probabilité } p \\ ud p + d^2(1-p) & \text{avec probabilité } 1-p \end{cases}$$

$$\bullet E(S_2 | \mathcal{F}_0) = E(X_1 X_2 | \mathcal{F}_0)$$

$$= \sum_{B \text{ atome}} E(X_1 X_2 | B) 1_B = E(X_1 X_2 | \Omega) 1_\Omega$$

$$= E(X_1 X_2 | \Omega) = \frac{E(X_1 X_2 1_\Omega)}{P(\Omega)=1} = E(X_1 X_2)$$

$$= (E(X_2))^2 \quad \text{car } X_1, X_2 \text{ sont indep.}$$

$$= [up + d(1-p)]^2$$

$$\bullet E(E(S_2 | \mathcal{F}_1) | \mathcal{F}_0) = E(S_2 | \mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_0) = E(X_1 E(X_2) | \mathcal{F}_0)$$

$$= E(X_2) E(X_1 | \mathcal{F}_0) \quad \text{car constante}$$

$$= E(X_2) E(X_1) \quad X_1 \text{ et } X_2 \text{ ont les mêmes lois}$$

$$= E(X_1 X_2) = E(S_2)$$

$$3) E(S_n | \mathcal{F}(X_1, X_2, \dots, X_k)) \quad (k \leq n)$$

$$= E(E(S_n | \mathcal{F}_{n+1}) | \mathcal{F}_k) = \dots = E(E(E(S_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-2}) | \dots | \mathcal{F}_k) \rightarrow$$

$$= E(S_n | \mathcal{F}_{n-1} | \mathcal{F}_{n-2} | \dots | \mathcal{F}_k) \quad \text{car } E(X_1 X_2 \dots X_n | \mathcal{F}_{n-1}) = X_1 X_2 \dots X_{n-1} E(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$$

$$= E(X_1) E(S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-1} | \dots | \mathcal{F}_k) = E(X_n) E(X_{n-1}) \dots E(X_{k+2}) \times E(S_{k+1} | \mathcal{F}_k)$$

$$E(X_1 X_2 \dots X_{n-1} E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-2}) = X_1 X_2 \dots X_{n-2} E(X_{n-1} E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) | \mathcal{F}_{n-2})$$

$$\rightarrow = E(X_1) E(S_{n-1} | \mathcal{F}_{n-2} | \mathcal{F}_{n-3} \dots | \mathcal{F}_k) \dots$$

$$= E(X_1) E(X_{n-1}) \dots E(X_{k+1}) E(S_k | \mathcal{F}_k) = \underline{(E(X_1))^{n-k} S_k}$$

OU

$$E(X_1 X_2 \dots X_n | \mathcal{F}_k) = X_1 X_2 \dots X_k E(X_{k+1} X_{k+2} \dots X_n | \mathcal{F}_k)$$

$$= X_1 X_2 \dots X_k E(X_{k+1} X_{k+2} \dots X_n)$$

$$= X_1 X_2 \dots X_k E(X_{k+1}) E(X_{k+2}) \dots E(X_n)$$

$$= \underline{S_k (E(X_1))^{n-k}}$$

Exercice 5

$$X_k = \begin{cases} 1 & \text{si le } k\text{-ième jeu donne « pile »} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$S_p = X_1 + X_2 + \dots + X_p =$ « nombre de parties gagnées parmi p si joueur est ^{timide} »
 gain après p parties $= S_p - (p - S_p) = 2 S_p - p$ sauf si le jeu s'est arrêté avant
 $p \leq n$ $S_n - S_p = X_{p+1} + X_{p+2} + \dots + X_n$

$$p(S_p = i | S_n = j) = \frac{p(S_p = i \text{ et } S_n = j)}{p(S_n = j)}$$

$$= \frac{p(S_n - S_p = j - i \text{ et } S_p = i)}{p(S_n = j)}$$

$$\frac{C_{n-p}^{j-i} C_p^i}{C_n^j} = \frac{C_{n-p}^{j-i} \alpha^{j-i} (1-\alpha)^{n-p-j+i} C_p^i \alpha^i (1-\alpha)^{p-i}}{C_n^j \alpha^j (1-\alpha)^{n-j}}$$

$$= \frac{C_{n-p}^{j-i} C_p^i}{C_n^j}$$

$$E(S_p | S_n) = \frac{p j}{n} = \frac{p S_n}{n}$$

Exercice 7

$$I = [0, n]$$

$X_n =$ fortune du joueur à la date n .

stratégie timide

$$p(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin \{i-1, i+1\} \\ q & \text{si } j = i-1 \\ p & \text{si } j = i+1 \end{cases}$$