

24/01/2011.

Arbres binomiaux - Swap de taux.

Arbres binomiaux.

- base du pricing.

3 méthodes de pricing :

- * Arbre
- * Monte Carlo : long mais + précis.
- * Black & Scholes : rapide

Problématique : titre = 100 €. la moyenne des anticipations des analystes est de 90% de chance d'être à 110€ et 10% de chance d'être 90€.
Soit un call de maturité 1 et de strike = 100€.

Quel est le rendement moyen espéré ?

$$110 \times 90\% + 90 \times 10\% = 108 - 100 = 8\%$$

Quel est le prix de ce call :

- quelle est la proba risque neutre de ce call ?

→ la proba risq neutre est la proba par q tel que le rendement moyen sous q soit égal à R .

$$110 \times q + 90 \times (1-q) = 100(1+R) \quad \text{ici } R=0.$$

$$q = \frac{1}{2}.$$

la valeur de l'option est l'espérance des flux futurs actualisés sous la probabilité q .

$$110 - \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix} \rightarrow \text{flux futurs} = \text{payoff}.$$
$$90 - \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

il faut actualiser : prix de call = $\frac{10 \times q + 0 \times (1-q)}{1+R} = 5 \text{ €}.$

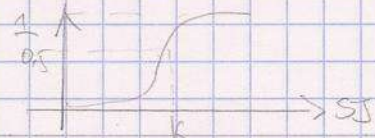
Comment assurer le hedge ?

→ 5€ ou le prix du call d'une manière générale est le coût de la duplication et donc du hedge de ce call.

→ Le delta soit le hedge ratio est ici 50%.



delta $\Rightarrow$ Δ pente.



→ Il faut donc acheter 10% d'un titre, au moyen des 5€ de prime + d'un emprunt de 45%

• Vendeur optionnelle $\Rightarrow$ Delta négatif. (-0,5)

• Pour être insensible aux variations de SJ. $\Rightarrow$ Être delta neutre

• delta du SJ = 1 (delta one)

• Hedge = +0,5 $\Rightarrow$ Delta + car delta négatif de 0,5

Hedge $\Rightarrow$ protec^o $\Rightarrow$ % d'action à acheter pour couvrir sa posi^o

$$100 \begin{cases} 110 \Rightarrow 55 - 45 = 10. \\ 90 \Rightarrow 45 - 45 = 0. \end{cases} \quad \uparrow \text{pay off.}$$

→ Si titre en T = 110 $\rightarrow$ (titre =) 55 - (emprunt) 45 = 10

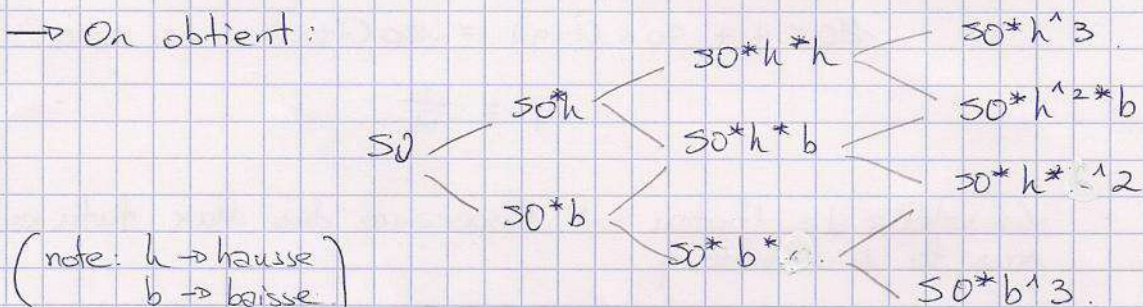
→ Si titre en T = 90 $\rightarrow$ (titre =) 45 - (emprunt) 45 = 0.

Pricing par arbre binaire, multi-périodes

→ le principe est l'empilement d'arbre discret à 1 période.

→ le modèle est dit multiplicatif et recombinaison.

→ On obtient:



→ On appellera π la proba de hausse

→ Il est démontrable que :

$$1 - \pi = \frac{h - 1 - R}{h - b} \quad \text{(baisse)}$$

$$\pi = \frac{1 + R - b}{h - b} \quad \text{(hausse)}$$

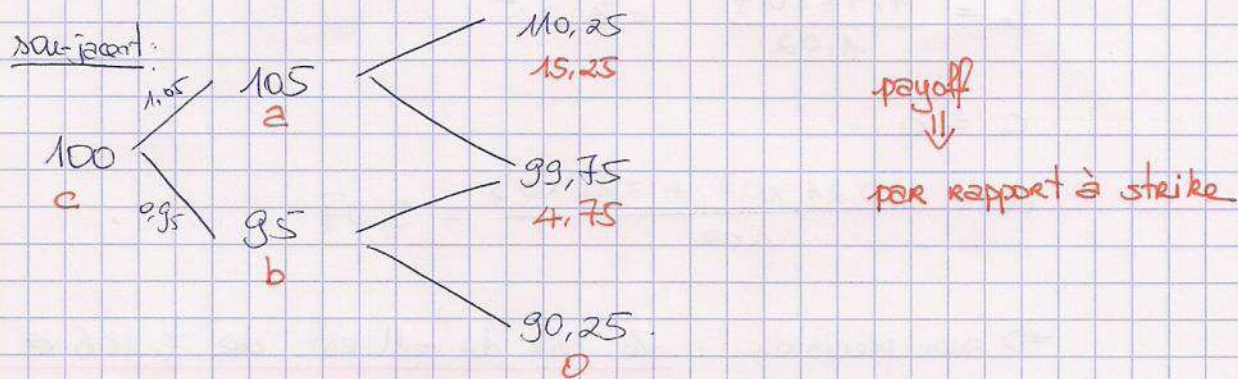
b $\rightarrow$ baisse
h $\rightarrow$ hausse

→ Pour réaliser le pricing via un arbre binaire, il suffit de compléter le prix du sous-jacent, puis d'en déduire le payoff et de l'actualiser.

Pricing d'un call à 2 périodes.

exemple: $S_0 = 100$ $N = 2$ $h = 1,05$; $b = 0,95$; $R = 1\%$.

Quelle est la valeur en 0 du call de maturité, de strike $K = 95$?



$$\pi = \frac{1 + 0,01 - 0,95}{1,05 - 0,95} = 0,6$$

$$a = \frac{15,25 \times 0,6 + 4,75 \times 0,4}{1,01} = 10,94$$

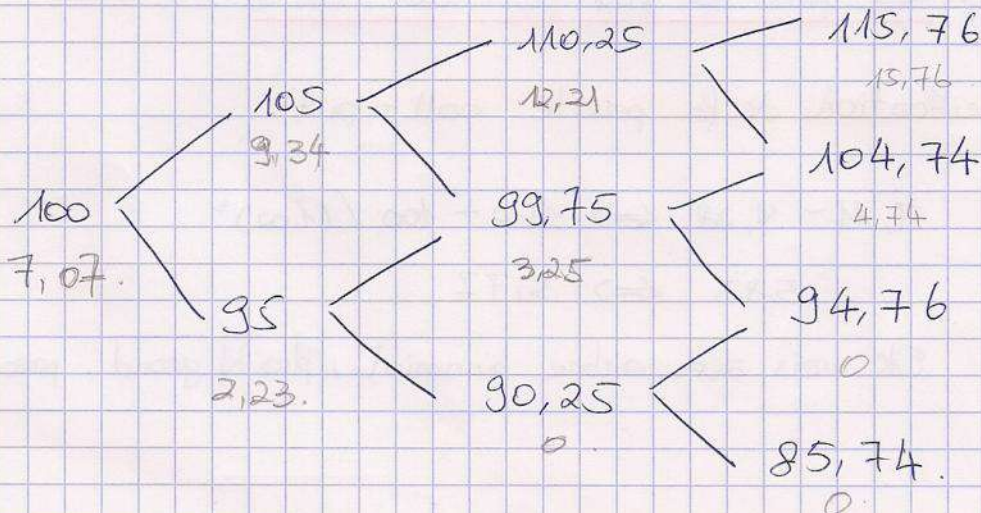
$$b = \frac{4,75 \times 0,6 + 0 \times 0,4}{1,01} = 2,82$$

$$c = \frac{10,94 \times 0,6 + 2,82 \times 0,4}{1,01} = 7,62$$

⇒ le prix du call est de 7,62 €.

Exercice :

$S_0 = 100$ $N = 3$ $h = 1,05$ $b = 0,95$ $R = 2\%$ strike à l'avance = 100.



$$\pi = \frac{1 + 0,02 - 0,95}{1,05 - 0,95} = 0,7.$$

$$a = \frac{15,76 \times 0,7 + 4,74 \times 0,3}{1,02} = 12,21.$$

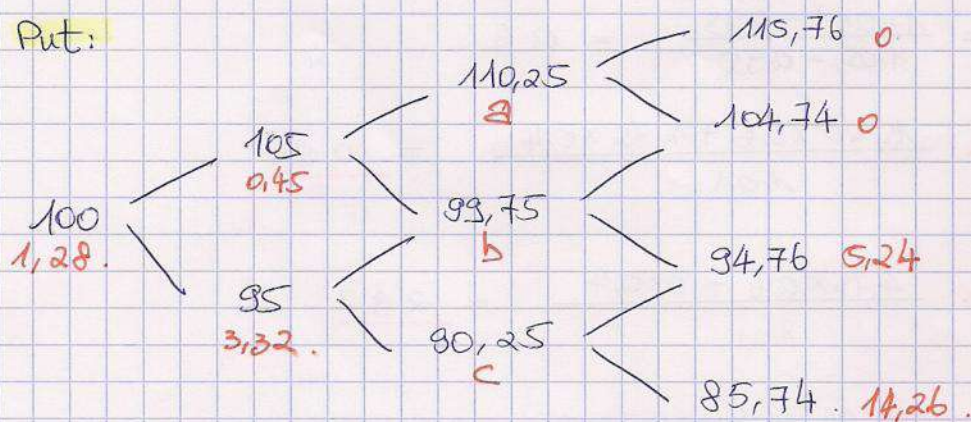
$$b = \frac{4,74 \times 0,7}{1,02} = 3,25.$$

$$c = 0.$$

$$d = \frac{12,21 \times 0,7 + 3,25 \times 0,3}{1,02} = 9,37 \dots \dots \dots$$

⇒ avec précision : le prix du call est de 7,106 €.

Put:



$$\pi = 0,7. \text{ (idem) }$$

$$a = 0.$$

$$b = \frac{0 \times 0,7 + 5,24 \times 0,3}{1,02} = 1,53.$$

$$c = \frac{5,24 \times 0,7 + 14,26 \times 0,3}{1,02} = 7,77.$$

⇒ le prix de put est de 1,28 €.

Vérification de la parité call-put:

$$7,11 - 4,28 \Leftrightarrow 100 - 100 / (1,02)^3$$

$$\Rightarrow 5,83 \Leftrightarrow 5,77.$$

Ok mais avec arbre binomial, plus N grand, précision ↓.

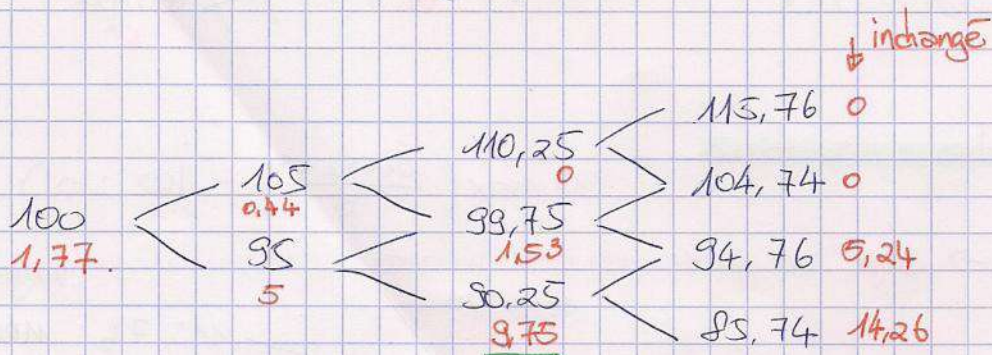
$$\text{Call} - \text{Put} = S_0 - \frac{\text{strike}}{(1+R)^N}$$

note: $k = \text{strike}$
 $N = T$

Put à l'Américaine. On peut exercer à n'importe quel moment

On regarde à chaque nœud, si l'actualisation du flux futur est plus ou moins intéressante que l'exercice de l'option.

$$\frac{\max[\max(k - S_J; 0); (S_J h \times \pi + S_J b \times (1 - \pi))]}{(1+R)}$$

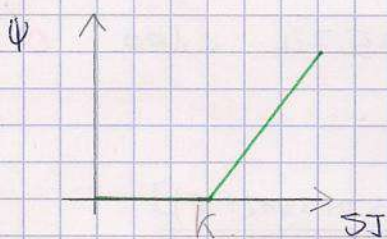


$$\rightarrow 100 - 90.25 = 9.75 > 1.77$$

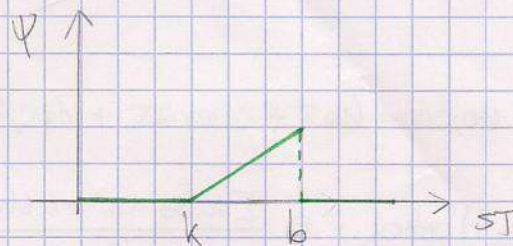
$$\rightarrow \max(\text{"put européen"; } (100 - \text{valeur du nœud}))$$

Les options à barrière

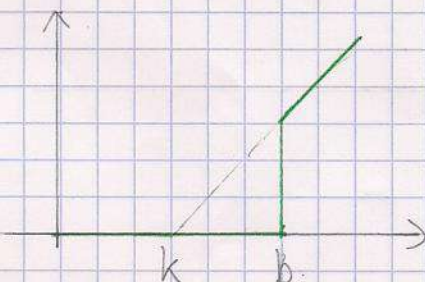
call:



call up & out (européenne).



call up-in (européenne)

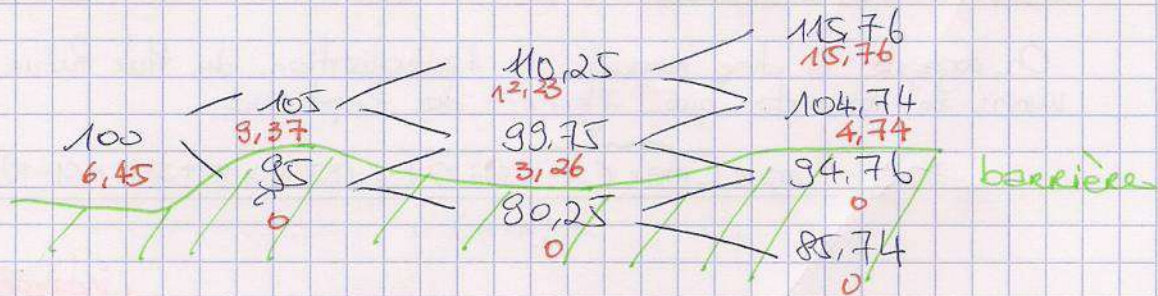


$$\underline{\text{call} = \text{call up-in} + \text{call up-out}}$$

Call down and out (D₀ = 97,50)

[voir l'arbre p. 3. (celui d'enbas)]

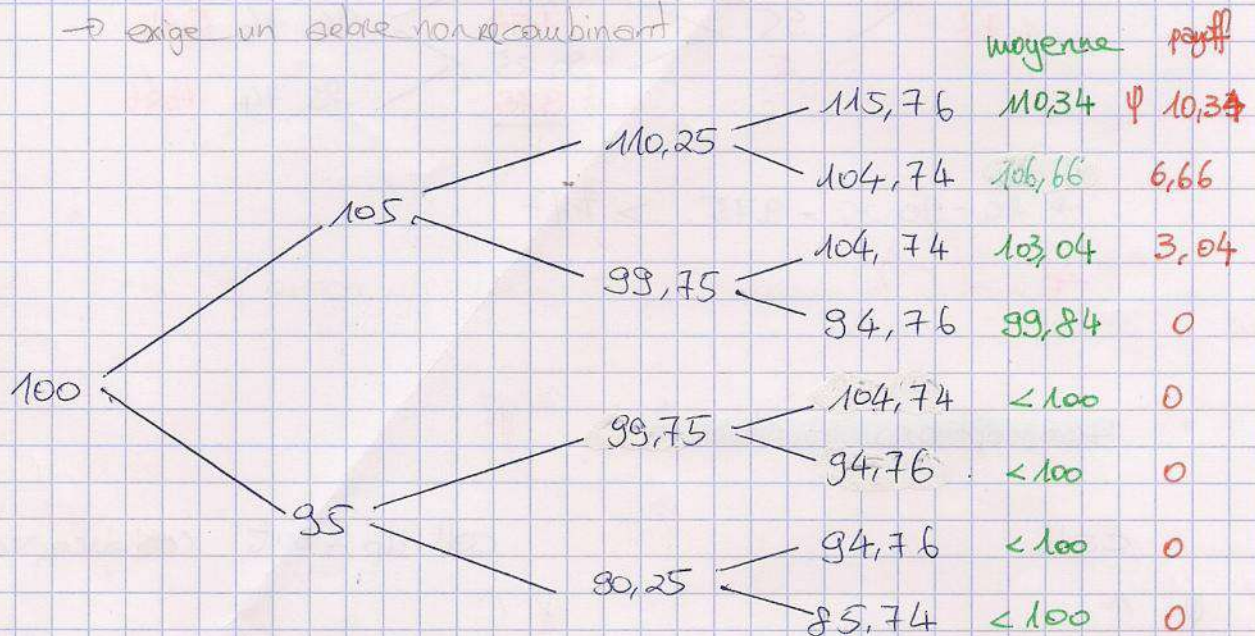
Avec barrière :



Option asiatique :

$$\Psi \max\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} - 100 ; 0\right)$$

→ exige un arbre non recombinaison



$$110,34 = (105 + 110,25 + 115,76) \div 3 \dots$$

Prix d'option : =
$$\frac{[10,34 \times \pi^3 + 6,6625 \times \pi^2 \times (1-\pi) + 3,04 \times \pi^2 \times (1-\pi)]}{(1+r)^3}$$

FIN