

Commande des Systèmes Robotiques - NSR13

Modélisation

Support de cours réalisé en collaboration avec Wael BACHTA

Vincent PADOIS

`vincent.padois@upmc.fr`

Université Pierre et Marie Curie
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (CNRS UMR 7222)



Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Rappel du plan

1 Organisation et contenu de l'UE

- Emploi du temps
- Fonctionnement et contrôle des connaissances
- Contenu de l'UE

2 Modélisation géométrique

- Notions de base
- Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
- Modèle géométrique inverse

3 Modélisation cinématique

- Composition des vitesses
- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse

4 Modélisation dynamique

- Modèle dynamique du robot
- Modèle dynamique d'un axe
- Modèle dynamique du robot + axes

Emploi du temps

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1			Sala	55/46 116	B2 41 114	?		46-00	46-00 ?	46-00 ?	46-00 ?	46-00 ?	46-00	46-00	46-00 ?	46-00 ?	
2			Objet	Cours1	Cours2	Cours3	Cours4	TP Matlab	TP A1	TP A2	TP B1	TP B2	TP C1	TP C2	TP D1	TP D2	
3	Nom	N° Etudiant	Scalard	06/11/09	13/11/09	20/11/09	27/11/09	04/12/09	07/12/09	14/12/09	09/12/09	16/12/09	11/12/2009 AM	18/12/2009 AM	11/12/2009 PM	18/12/2009 PM	
4	BESSACUD	2961121	PS						X	X							
5	CHEN	2673304	PS						X	X							
6	FABRE	2966525	PS/ENSTA										X	X			
7	HAN	2761384	PS						X	X							
8	JAVOT	2671929	PS						X	X							
9	KOUKOU	2668078	PS						X	X							
10	LEYVA	2960765	PS						X	X							
11	LOUSSAIEF	2661067	PS												X	X	
12	LU	2967285	PS/ENSTA												X	X	
13	MA	2761016	PS							X	X						
14	MESBAHI	2964423	PS												X	X	
15	SARR	2967005	PS												X	X	
16	SHALHOUT	2306575	PS												X	X	
17	WEI	2968179	PS												X	X	
18	XIE	2961331	PS												X	X	
19	YOON	2766370	PS								X	X					
20	Andolfatto		ENS								X	X					
21	Boudon		ENS								X	X					
22	Tabouret		ENS								X	X					
23	Volebreugt		ENS								X	X					
24	ZHANG		ENSAM										X	X			
25	WANG		ENSAM										X	X			
26	HACHE		ENSAM										X	X			
27	SANCHEZ		ENSAM										X	X			
28	PAGE		ENSAM										X	X			

Rappel du plan

1 Organisation et contenu de l'UE

- Emploi du temps
- **Fonctionnement et contrôle des connaissances**
- Contenu de l'UE

2 Modélisation géométrique

- Notions de base
- Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
- Modèle géométrique inverse

3 Modélisation cinématique

- Composition des vitesses
- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse

4 Modélisation dynamique

- Modèle dynamique du robot
- Modèle dynamique d'un axe
- Modèle dynamique du robot + axes

Fonctionnement et contrôle des connaissances

Bon à savoir

- Transparents de cours disponibles sur le site web de l'UE :
<http://chronos.isir.upmc.fr/~padois/teaching/comrob> ;
- Les cours et les TPs sont obligatoires.
- Tout(e) étudiant(e) arrivant en retard pourra se voir refuser l'accès à la salle de cours ou à la salle de TP.

Contrôle des connaissances

- Evaluation sur 100 points dont 60 points pour l'examen et 40 points pour le CC
- Contrôle continu :
 - Exercices à rendre et/ou interrogations surprises
 - Compte-rendu et code de TP
- Examen de 4h00 le 08/01/2010 avec une partie sous Matlab et sans documents

Rappel du plan

1 Organisation et contenu de l'UE

- Emploi du temps
- Fonctionnement et contrôle des connaissances
- **Contenu de l'UE**

2 Modélisation géométrique

- Notions de base
- Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
- Modèle géométrique inverse

3 Modélisation cinématique

- Composition des vitesses
- Modèle cinématique direct
- Modèle cinématique inverse

4 Modélisation dynamique

- Modèle dynamique du robot
- Modèle dynamique d'un axe
- Modèle dynamique du robot + axes

Contenu de l'UE

Cours

- Introduction de la problématique de la commande en Robotique
- Modélisation (essentiellement ce cours) et identification des systèmes Robotiques en vue de leur commande
- Techniques de commande articulaire "classiques" en Robotique
- Techniques de commande opérationnelle

TPs

- Identification paramétrique du modèle dynamique d'un système Robotique (sous Matlab, à partir de données expérimentales)
- Contrôle décentralisé et réglage des correcteurs PID (avec un robot à deux DdL)
- Contrôle avec découplage dynamique (avec un robot à deux DdL)

Notations

- R_i : repère numéro i
- P : point
- ${}^iP$: coordonnées de P dans le repère i
- $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{OP}$: vecteurs
- ${}^i\mathbf{OP}$: coordonnées du vecteur $\mathbf{OP}$ dans le repère $n^\circ i$
- $\mathbf{R}_{ij}$ matrice de rotation du repère R_i vers le repère R_j exprimée dans R_i
- $\mathbf{M}_{ij}$ matrice de transformation homogène du repère R_i vers le repère R_j exprimée dans R_i
- $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$: produit vectoriel
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$: produit scalaire

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 **Modélisation géométrique**
 - **Notions de base**
 - **Modèle géométrique direct**
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - **Modèle géométrique inverse**
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 **Modélisation géométrique**
 - **Notions de base**
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Orientation d'un solide (1)

Définition

Définir la rotation d'un solide auquel on attache un repère R_1 par rapport à un repère R_0

Méthode

Exprimer les coordonnées des vecteurs du repère R_1 dans R_0
Ce qui nous donne :

$$x_1 = x_1 \cdot x_0 + x_1 \cdot y_0 + x_1 \cdot z_0$$

$$y_1 = y_1 \cdot x_0 + y_1 \cdot y_0 + y_1 \cdot z_0$$

$$z_1 = z_1 \cdot x_0 + z_1 \cdot y_0 + z_1 \cdot z_0$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \cdot x_0 & x_1 \cdot y_0 & x_1 \cdot z_0 \\ y_1 \cdot x_0 & y_1 \cdot y_0 & y_1 \cdot z_0 \\ z_1 \cdot x_0 & z_1 \cdot y_0 & z_1 \cdot z_0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de rotation de } R_1 \text{ vers } R_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = R_{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Orientation d'un solide (1)

Définition

Définir la rotation d'un solide auquel on attache un repère R_1 par rapport à un repère R_0

Méthode

Exprimer les coordonnées des vecteurs du repère R_1 dans R_0

Ce qui nous donne :

$$x_1 = x_1.x_0 + x_1.y_0 + x_1.z_0$$

$$y_1 = y_1.y_0 + y_1.y_0 + y_1.z_0$$

$$z_1 = z_1.z_0 + z_1.y_0 + z_1.z_0$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} {}^1x_0 & {}^1y_0 & {}^1z_0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de rotation de } R_1 \text{ vers } R_0} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = R_{10} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Orientation d'un solide (2)

Méthode

On peut aussi définir la rotation du repère R_0 vers le repère R_1 en exprimant les coordonnées des vecteurs de R_0 dans R_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{01} &= \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{x}_1 & {}^0\mathbf{y}_1 & {}^0\mathbf{z}_1 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{y}_0 \cdot \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{x}_1 & \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{y}_1 & \mathbf{z}_0 \cdot \mathbf{z}_1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice de rotation de } R_0 \text{ vers } R_1} \end{aligned} \quad (2)$$

Remarque

- Par définition, on a : $\mathbf{R}_{01} = \mathbf{R}_{10}^{-1}$
- On remarque aussi que $\mathbf{R}_{01} = \mathbf{R}_{10}^T$

$$\mathbf{R}_{01} = \mathbf{R}_{10}^{-1} = \mathbf{R}_{10}^T$$

Rotations élémentaires

Rotation d'un angle θ autour de x_0

$$\mathbf{R}_{(\theta, x_0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

Rotation d'un angle θ autour de y_0

$$\mathbf{R}_{(\theta, y_0)} = \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \quad (4)$$

Rotation d'un angle θ autour de z_0

$$\mathbf{R}_{(\theta, z_0)} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Applications : changement de repère d'un vecteur (1)

Soit un vecteur $\mathbf{v}$, on cherche à déterminer ses coordonnées dans R_1 connaissant ses coordonnées dans R_0 :

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_{x0}\mathbf{x}_0 + v_{y0}\mathbf{y}_0 + v_{z0}\mathbf{z}_0 \\ &= \begin{pmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{pmatrix} \mathbf{R}_{01}}_{\text{Coordonnées de } \mathbf{v} \text{ dans } R_1} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{z}_1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a donc : $\begin{pmatrix} v_{x1} & v_{y1} & v_{z1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x0} & v_{y0} & v_{z0} \end{pmatrix} \mathbf{R}_{01}$ d'où $\begin{pmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{10} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix}$ En

conclusion

$${}^1\mathbf{v} = \mathbf{R}_{10} {}^0\mathbf{v} \quad (6)$$

Applications : changement de repère d'un vecteur (2)

Composition

Si on a :

- trois repères R_0 , R_1 et R_2 et ${}^2\mathbf{v}$ (les coordonnées du vecteur $\mathbf{v}$ dans R_2)
- les matrices de rotation $\mathbf{R}_{01}$ et $\mathbf{R}_{12}$

On peut écrire :

- ${}^1\mathbf{v} = \mathbf{R}_{12} {}^2\mathbf{v}$
- ${}^0\mathbf{v} = \mathbf{R}_{01} {}^1\mathbf{v}$

En conclusion

$${}^0\mathbf{v} = \mathbf{R}_{01}\mathbf{R}_{12} {}^2\mathbf{v} \quad (7)$$

Applications : Rotation d'un vecteur dans un repère fixe (1)

Objectif

Déterminer l'image d'un vecteur $\mathbf{v}$ par une rotation d'angle θ autour d'un axe Ω dans un repère fixe R_0

Méthode

Exprimer les coordonnées de $\mathbf{v}$ dans un repère R_1 qui est l'image de R_0 par une rotation d'angle θ autour de Ω

$${}^0\mathbf{v}' = {}^1\mathbf{v} = \mathbf{R}_{10} {}^0\mathbf{v}$$

$\mathbf{R}_{10}$ est $\mathbf{R}_{01}^{-1}$ donc une rotation d'angle θ autour de Ω

Applications : Rotation d'un vecteur dans un repère fixe (2)

Composition

Si l'on fait deux rotations successives d'angles respectifs θ_1 et θ_2 et d'axes respectifs Ω_1 et Ω_2 on a :

$$\mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)(\theta_2, \Omega_2)} = \mathbf{R}_{(\theta_2, \Omega_2)} \mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)}$$

En effet si l'on note $\mathbf{v}'$ l'image de $\mathbf{v}$ par la première rotation et $\mathbf{v}''$ l'image de $\mathbf{v}'$ par la seconde rotation, on a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad {}^0\mathbf{v}' &= \mathbf{R}_{10} {}^0\mathbf{v} \\ \bullet \quad {}^0\mathbf{v}'' &= \mathbf{R}_{21} {}^0\mathbf{v}' = \underbrace{\mathbf{R}_{21}}_{\mathbf{R}_{(\theta_2, \Omega_2)}} \underbrace{\mathbf{R}_{10}}_{\mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)}} {}^0\mathbf{v} = \underbrace{\mathbf{R}_{20}}_{\mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)(\theta_2, \Omega_2)}} {}^0\mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_{21} \mathbf{R}_{10} \iff \mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)(\theta_2, \Omega_2)} = \mathbf{R}_{(\theta_2, \Omega_2)} \mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)} \quad (8)$$

Applications : Rotation d'un vecteur dans un repère fixe (3)

Problème

Comment faire pour obtenir l'image d'un vecteur $\mathbf{v}$ par une rotation d'angle θ et autour d'un vecteur unitaire quelconque $\mathbf{\Omega}$?

Méthode

Transformer le problème pour n'utiliser que les rotations élémentaires :

- ➊ Transformer $\mathbf{v}$ par une rotation qui ramène l'axe de rotation sur $\mathbf{x}$
- ➋ Faire la rotation d'angle θ autour de $\mathbf{x}$
- ➌ Faire l'inverse de l'opération 1

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{(\theta, \mathbf{\Omega})} &= \mathbf{R}_{(\alpha, \mathbf{x})} \mathbf{R}_{(\beta, \mathbf{y})} \mathbf{R}_{(\theta, \mathbf{x})} \mathbf{R}_{(-\beta, \mathbf{y})} \mathbf{R}_{(-\alpha, \mathbf{x})} \\
 &= \begin{pmatrix} \omega_x^2 v_\theta + c\theta & \omega_x \omega_y v_\theta - \omega_z s\theta & \omega_x \omega_z v_\theta + \omega_y s\theta \\ \omega_x \omega_y v_\theta + \omega_z s\theta & \omega_y^2 v_\theta + c\theta & \omega_y \omega_z v_\theta - \omega_x s\theta \\ \omega_x \omega_z v_\theta - \omega_y s\theta & \omega_y \omega_z v_\theta + \omega_x s\theta & \omega_z^2 v_\theta + c\theta \end{pmatrix} \quad (9)
 \end{aligned}$$

avec $v_\theta = 1 - c\theta$ et $\mathbf{\Omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]$

Propriétés des matrices de rotation

- La norme des vecteurs lignes et vecteurs colonnes est égale à 1
- Les vecteurs lignes et colonnes sont orthogonaux entre eux
- $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$
- $\det(\mathbf{R}) = 1$
- Composition des rotation : $\mathbf{R}_{21}\mathbf{R}_{10} \iff \mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)(\theta_2, \Omega_2)} = \mathbf{R}_{(\theta_2, \Omega_2)}\mathbf{R}_{(\theta_1, \Omega_1)}$
- Le produit des matrices de rotation n'est pas commutatif

L'attitude

Définition

L'attitude d'un repère R_1 par rapport à un repère R_0 est définie par ${}^0\mathbf{O}_1$, les coordonnées de O_1 dans R_0 et par $\mathbf{R}_{01}$, la rotation de R_0 vers R_1 .

Les coordonnées d'un point P dans R_0 peuvent être obtenues à partir de ses coordonnées dans R_1 de la façon suivante :

$${}^0\mathbf{P} = {}^0\mathbf{O}_1 + \mathbf{R}_{01} {}^1\mathbf{P} \quad (10)$$

Les matrices homogènes

Définition

Un outil permettant d'effectuer un changement de repère d'un point en une seule opération matricielle. On rajoute pour cela une quatrième coordonnée valant un aux coordonnées du point en question.

$$\mathbf{M}_{01} = \begin{pmatrix} & \mathbf{R}_{01} & \begin{matrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}^1\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{x1} \\ p_{y1} \\ p_{z1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

où $[t_x \ t_y \ t_z] = {}^0\mathbf{O}_1$

On a alors :

$${}^0\mathbf{P} = \mathbf{M}_{01} {}^1\mathbf{P} \quad (12)$$

Propriétés des matrices homogènes

Composition

$$\mathbf{M}_{02} = \mathbf{M}_{01} \mathbf{M}_{12} \quad (13)$$

Inverse

$$\mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{T} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 **Modélisation géométrique**
 - Notions de base
 - **Modèle géométrique direct**
 - Paramétrage opérationnel
 - **Convention de Denavit-Hartenberg (DH)**
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Modèle géométrique direct

Définition

Le modèle géométrique direct permet d'obtenir l'attitude du repère attaché à l'organe terminal d'un robot à partir des positions articulaires

Paramétrage de la position

- Les trois paramètres de translation seront presque toujours les coordonnées de l'origine du repère attaché à l'organe terminal
- Ces coordonnées sont en général exprimées dans le repère R_0

Paramétrage de la rotation : axe/angle

Définition

Toute rotation peut être représenté par un axe de rotation unitaire $\mathbf{u}$ et d'un angle de rotation θ

Paramétrage (matrice de rotation $\Rightarrow$ représentation axe/angle)

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad \mathbf{u} = \frac{1}{2\sin(\theta)} \begin{pmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Transformation inverse (représentation axe/angle $\Rightarrow$ matrice de rotation)

$$\mathbf{R} = c\theta \mathbb{I}_3 + s\theta \mathbf{AS}(\mathbf{u}) + (1 - c\theta) \mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (16)$$

où $\mathbf{ASu}$ est la matrice de préproduit vectoriel associée au vecteur $\mathbf{u}$.

Paramétrage de la rotation : Roulis, Tangage, Lacet (1)

Définition

Toute rotation peut être représentée par trois rotations successives des axes **x**, **y** et **z** :

$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{(z, \theta_l)} \mathbf{R}_{(y, \theta_t)} \mathbf{R}_{(x, \theta_r)}$ (autour des axes du repère initial)

Paramétrage

$$\theta_l = \arctan_2(r_{21}, r_{11}) \quad \theta_r = \arctan_2(r_{32}, r_{33}) \quad \theta_t = \arctan_2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \quad (17)$$

Transformation inverse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c\theta_l c\theta_t & -s\theta_l c\theta_r + c\theta_l s\theta_t s\theta_r & s\theta_l s\theta_r + c\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ s\theta_l c\theta_t & c\theta_l c\theta_r + s\theta_l s\theta_t s\theta_r & -c\theta_l s\theta_r + c\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ -s\theta_t & c\theta_t s\theta_r & c\theta_t c\theta_r \end{pmatrix} \quad (18)$$

Paramétrage de la rotation : Roulis, Tangage, Lacet (2)

Singularités

- $\theta_t = 90^\circ$: $\theta_l = 0$ et $\theta_r = \arctan_2(r_{12}, r_{22})$
- $\theta_t = -90^\circ$: $\theta_l = 0$ et $\theta_r = -\arctan_2(r_{12}, r_{22})$

Paramétrage de la rotation : Angles d'Euler Z-Y-X (1)

Définition

Toute rotation peut être décomposée en trois rotations successives : une première d'angle α autour de **z**, une deuxième d'angle β autour de **y** du repère obtenu après la première rotation et finalement une rotation d'angle γ autour de **x** du repère obtenu après la seconde rotation.

Paramétrage

$$\alpha = \arctan_2(r_{21}, r_{11}) \quad \beta = \arctan_2(-r_{31}, \sqrt{r_{11}^2 + r_{21}^2}) \quad \gamma = \arctan_2(r_{32}, r_{33}) \quad (19)$$

Transformation inverse

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{pmatrix} \quad (20)$$

Paramétrage de la rotation : Angles d'Euler Z-Y-X (2)

Singularités

- $\beta = 90^\circ$: $\alpha = 0$ et $\gamma = \arctan_2(r_{12}, r_{22})$
- $\beta = -90^\circ$: $\alpha = 0$ et $\gamma = -\arctan_2(r_{12}, r_{22})$

Notations, principe et contraintes

Notations

- Le robot est constitué de $n + 1$ corps reliés entre eux par n articulations
- A chaque corps on associe un repère R_i . i variant de 0 à n
- La $i^{\text{ème}}$ articulation q_i relie les corps $i - 1$ et i

Idée motrice

- Fixer des repères à chaque corps du robot
- Calculer les matrices homogènes entre deux corps successifs
- Calculer la matrice homogène entre la base et l'organe terminal

Contraintes

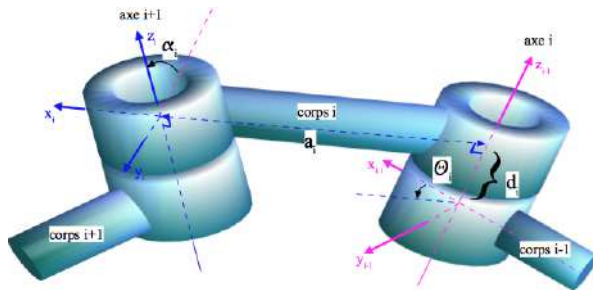
L'attitude d'un repère R_i par rapport à un repère R_{i-1} peut être représentée par 4 paramètres à condition que :

- l'axe $\mathbf{x}_i$ de R_i soit perpendiculaire à l'axe $\mathbf{z}_{i-1}$ de R_{i-1}
- l'axe $\mathbf{x}_i$ de R_i coupe l'axe $\mathbf{z}_{i-1}$ de R_{i-1}

Paramétrage

Attachement des repères

- L'axe z_i de R_i est confondu avec l'axe $i + 1$ du robot
- L'axe x_i de R_i est perpendiculaire à l'axe i du robot



Paramétrage : cas particuliers

Les axes $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i$ sont parallèles

Une infinité de normales communes à $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i$. On place O_i tel que $d_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

Les axes $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i$ se coupent

On place O_i à l'intersection de $\mathbf{z}_{i-1}$ et $\mathbf{z}_i \Rightarrow a_i = 0$

Choix du repère R_0

L'origine du repère R_0 est placée de manière arbitraire le long de l'axe 1

Choix du repère R_n

- $\mathbf{z}_n$ est placé parallèlement à $\mathbf{z}_{n-1}$
- O_n est placé au centre de l'outil
- $\mathbf{y}_n$ est placé dans la direction de fermeture de l'outil (par exemple une pince)

Matrice homogène DH

Transformation de R_{i-1} à R_i

Elle est décomposée en 4 transformations élémentaires :

- ① Rotation autour de z d'un angle θ_i
- ② Translation le long de z d'une distance d_i
- ③ Translation le long de x d'une distance a_i
- ④ Rotation autour de x d'un angle α_i

La matrice de transformation homogène s'écrit donc :

$$DH_{i-1,i} = \begin{pmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Exemple : Robot SCARA

Pour le mercredi 2/12 avant 23h59 : rendre par email (vincent.padois@upmc.fr) un document PDF présentant le placement des repères et le tableau des paramètres DH tels que présentés dans ce cours pour un robot SCARA (A vous de trouver ce qu'est un robot SCARA!).

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 **Modélisation géométrique**
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - **Modèle géométrique inverse**
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Modèle géométrique inverse

- Pas de méthode systématique pour un manipulateur série général
- La solution n'est en général pas unique. Au maximum, un manipulateur série 6 axes possède 16 modes d'assemblage
- Des algorithmes généraux existent pour certaines classes de manipulateurs. Ils sont fastidieux (exemple : Pieper)
- Quand on cherche une expression formelle, on procède en général "à la main". Souvent on découple la partie orientation de la partie rotation
- Pour une inversion numérique, on utilise un algorithme itératif (optimisation par la méthode de Newton)

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - **Modèle cinématique direct**
 - **Modèle cinématique inverse**
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 **Modélisation cinématique**
 - **Composition des vitesses**
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Composition des vitesses

Définition

Soit un repère R_1 lié à un solide S , en mouvement par rapport à un repère R_0 . La vitesse du point P exprimé dans R_0 est définie de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{v}_{P \in 1/0} &= {}^0\mathbf{v}_{O_1 \in 1/0} + {}^0\boldsymbol{\Omega}_{1/0} \times {}^0\vec{O_1P} \\
 &= {}^0\mathbf{v}_{O_1 \in 1/0} + AS({}^0\boldsymbol{\Omega}_{1/0})\mathbf{R}_{01}^{-1}P \\
 &= {}^0\mathbf{v}_{01}^{O_1} + AS({}^0\boldsymbol{\Omega}_{1/0})\mathbf{R}_{01}^{-1}P
 \end{aligned} \tag{22}$$

Torseur cinématique

Définition

Le torseur cinématique d'un repère R_1 par rapport à un repère R_0 est défini par le vecteur vitesse de translation de l'origine de R_1 par rapport à R_0 ainsi que par le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0 .

$${}^0\mathbf{C}_{01} = \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{v}_{01}^{O_1} \\ {}^0\boldsymbol{\Omega}_{01} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Composition

Soient :

- ${}^0\mathbf{C}_{01}$ le torseur cinématique de R_1 par rapport à R_0
- ${}^1\mathbf{C}_{12}$ le torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1

On a :

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{v}_{02} &= {}^0\mathbf{v}_{01}^{O_2} + {}^0\mathbf{v}_{12}^{O_2} \\ {}^0\boldsymbol{\Omega}_{02} &= {}^0\boldsymbol{\Omega}_{01} + {}^0\boldsymbol{\Omega}_{12} \end{aligned} \quad (24)$$

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 **Modélisation cinématique**
 - Composition des vitesses
 - **Modèle cinématique direct**
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Modèle cinématique direct

Objectif

On cherche à exprimer la relation entre :

- Les vitesses articulaires q_i
- La vitesse de l'outil dans un repère fixe. Cette vitesse peut être exprimée par :
 - La dérivée des paramètres opérationnels
 - par les éléments de réduction en un point M du torseur cinématique $\{\mathbf{v}_{0n}^M, \boldsymbol{\Omega}_{0n}\}$

Définition du Jacobien (1)

Supposons qu'on ait n fonctions $f_{1...n}$ de m variables $x_{1...m}$:

$$\begin{aligned}y_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_m) \\y_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_m) \\&\vdots \\y_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}\tag{25}$$

Les différentielles des y_i s'écrivent de la façon suivante :

$$\begin{aligned}dy_1 &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n \\dy_2 &= \frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n \\&\vdots \\dy_n &= \frac{\partial f_n}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} dx_n\end{aligned}\tag{26}$$

Définition du Jacobien (2)

Ceci peut être mis sous forme matricielle : $d\mathbf{Y} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X}$

La matrice $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}$ est appelée jacobien de $\mathbf{F}$ et a la forme suivante :

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad (27)$$

Jacobien naturel du robot (1)

Définition

Soit un robot série possédant n articulations et dont les coordonnées articulaires sont notées q_i , i variant de 1 à n et $\mathbf{q} = [q_1 \cdots q_n]^T$ le vecteur des coordonnées articulaires. Soit ${}^0\mathbf{v}_{0n}^{O_n}$ la vitesse de l'origine du repère lié à l'organe du terminal exprimée dans le repère de base et ${}^0\boldsymbol{\Omega}_{0n}$ les coordonnées du vecteur vitesse de rotation de l'organe terminal dans le repère de base.

On a :

$$\begin{pmatrix} {}^0\mathbf{v}_{0n}^{O_n} \\ {}^0\boldsymbol{\Omega}_{0n} \end{pmatrix} = {}^0\mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (28)$$

$\mathbf{J}$ est appelé le jacobien naturel du robot.

Calcul du jacobien naturel du robot (1)

Calcul direct

La partie vitesse en translation

- Calculer la matrice homogène de transformation $\mathbf{M}_{0n}$ (Utilisation du modèle géométrique direct)
- Les trois premiers éléments de la dernière colonne correspondent à ${}^0\mathbf{O}_n$ qui dépend de $\mathbf{q}$
- La dérivée de ${}^0\mathbf{O}_n$ donne la première partie du jacobien : ${}^0\mathbf{v}_{0n} = {}^0\mathbf{J}_v\dot{\mathbf{q}}$

La partie vitesse de rotation

- Extraire la matrice de rotation $\mathbf{R}_{0n}$ de $\mathbf{M}_{0n}$
- Calculer $\frac{d\mathbf{R}_{0n}}{dt}\mathbf{R}_{n0} = \frac{d\mathbf{R}_{0n}}{dq_1}\dot{q}_1\mathbf{R}_{n0} + \dots + \frac{d\mathbf{R}_{0n}}{dq_n}\dot{q}_n\mathbf{R}_{n0}$
- A partir de $\text{AS}({}^0\Omega_{0n}) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{R}_{0n}}{dt}\mathbf{R}_{n0}$, effectuer une identification terme à terme pour obtenir la deuxième partie du jacobien : ${}^0\Omega_{0n} = {}^0\mathbf{J}_\omega\dot{\mathbf{q}}$

Calcul du jacobien naturel du robot (2)

Calcul par composition des vitesses

Les vitesses linéaires

On a : ${}^0\mathbf{v}_{0n}^{O_n} = {}^0\mathbf{v}_{01}^{O_n} + {}^0\mathbf{v}_{12}^{O_n} + \dots + {}^0\mathbf{v}_{i-1,i}^{O_n} + \dots + {}^0\mathbf{v}_{n-1,n}^{O_n}$

- Si l'axe i est prismatique on a : ${}^0\mathbf{v}_{i-1,i}^{O_n} = {}^0\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i$
- Si l'axe i est rotoïde on a : ${}^0\mathbf{v}_{i-1,i}^{O_n} = {}^0\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i \times (\mathbf{R}_{0,i-1}^{i-1}\mathbf{O}_n)$

Donc la première partie du jacobien s'écrit : ${}^0\mathbf{J}_v =$

$$\left((1 - \epsilon_1) {}^0\mathbf{z}_{i-1} + \epsilon_1 {}^0\mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{R}_{0,i-1}^{i-1}\mathbf{O}_n) \dots (1 - \epsilon_n) {}^0\mathbf{z}_{n-1} + \epsilon_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \times (\mathbf{R}_{0,n-1}^{n-1}\mathbf{O}_n) \right)$$

où $\epsilon_i = 1$ si l'axe i est rotoïde et 0 si l'axe est prismatique

Les vitesses angulaires

On a ${}^0\boldsymbol{\Omega}_{0n} = {}^0\boldsymbol{\Omega}_{01} + {}^0\boldsymbol{\Omega}_{12} + \dots + {}^0\boldsymbol{\Omega}_{i-1,i} + \dots + {}^0\boldsymbol{\Omega}_{n-1,n}$

- Si l'axe i est prismatique : ${}^0\boldsymbol{\Omega}_{i-1,i} = \mathbf{0}$
- Si l'axe i est rotoïde : ${}^0\boldsymbol{\Omega}_{i-1,i} = {}^0\mathbf{z}_{i-1}\dot{q}_i$

Donc la première partie du jacobien s'écrit : ${}^0\mathbf{J}_\omega = \left(\epsilon_1 {}^0\mathbf{z}_{i-1} \dots \epsilon_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \right)$

Calcul du jacobien naturel du robot (3)

Calcul par composition des vitesses

Donc en résumé, on a :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{J}_v \\ {}^0\mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} (1 - \epsilon_1) {}^0\mathbf{z}_{i-1} + \epsilon_1 {}^0\mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{R}_{0,i-1} {}^{i-1}\mathbf{O}_n) \dots (1 - \epsilon_n) {}^0\mathbf{z}_{n-1} + \epsilon_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \times (\mathbf{R}_{0,n-1} {}^{n-1}\mathbf{O}_n) \\ \epsilon_1 {}^0\mathbf{z}_{i-1} \quad \dots \quad \epsilon_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (29)
 \end{aligned}$$

où $\epsilon_i = 1$ si l'axe est rotoïde et 0 s'il est prismatique.

Calcul du jacobien naturel du robot (4)

Méthode retenue

Pour calculer le jacobien du robot, on utilisera la méthode de calcul direct pour la vitesse linéaire et la composition des vitesses pour la partie relevant de la vitesse angulaire :

$$\begin{aligned}
 {}^0\mathbf{J} &= \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{J}_v \\ {}^0\mathbf{J}_\omega \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{\partial {}^0\mathbf{O}_n}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial {}^0\mathbf{O}_n}{\partial q_n} \\ \epsilon_1 {}^0\mathbf{z}_{i-1} & \cdots & \epsilon_n {}^0\mathbf{z}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (30)
 \end{aligned}$$

où $\epsilon_i = 1$ pour les articulations rotoïdes et 0 pour les axes prismatiques.

Changement de repère du jacobien naturel

Expression du jacobien dans un repère différent de celui attaché à la base

Soit R_i le repère dans lequel on veut exprimer le jacobien du robot, on a :

$${}^i\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{i0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{i0} \end{pmatrix} {}^0\mathbf{J} \quad (31)$$

Expression du jacobien en un point attaché à un point différent du centre de l'outil

Généralement, le torseur cinématique est exprimé au centre de l'outil de l'organe terminal noté O_n . Si l'on veut l'exprimer en un autre point de l'outil P , nous utilisons la relation suivante :

$${}^0\mathbf{J}_P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 & -AS({}^0\vec{O_nP}) \\ \mathbf{0} & \mathbb{I}_3 \end{pmatrix} {}^0\mathbf{J}_{O_n} \quad (32)$$

Jacobien du paramétrage

Définition

Le jacobien du paramétrage qui relie la variation des paramètres représentant la rotation (angles d'Euler, ...) au vecteur de rotation angulaire

Le jacobien de paramétrage pour la représentation "Angles d'Euler Z-Y-X"

$$\Omega_{0n} = \dot{\alpha}\mathbf{z}_0 + \dot{\beta}\mathbf{y}_1 + \dot{\gamma}\mathbf{x}_2 \Rightarrow \Omega_{0n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -s\alpha & c\beta c\alpha \\ 0 & c\alpha & c\beta s\alpha \\ 1 & 0 & -s\beta \end{pmatrix}}_{{}^0J_p} \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Exemple : robot SCARA

Pour le mercredi 2/12 avant 23h59 : rendre par email (vincent.padois@upmc.fr) un document PDF présentant le calcul du jacobien naturel pour un robot SCARA en utilisant la méthode proposée dans ce cours.

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 **Modélisation cinématique**
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - **Modèle cinématique inverse**
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Modèle cinématique inverse

Définition

On a défini le jacobien $\mathbf{J}$ d'une fonction $F(\mathbf{X})$ par la relation suivante : $dY = \mathbf{J}(\mathbf{X})dX$ En divisant par dt , on obtient : $\dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{J}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{X}}$. Le jacobien donne donc la vitesse de $\mathbf{Y}$ en fonction de la vitesse de $\mathbf{X}$.

Pour obtenir la vitesse de $\mathbf{X}$ en fonction de la vitesse de $\mathbf{Y}$, on calcule :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})\dot{\mathbf{Y}}$$

$\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{X})$ lorsqu'il existe s'appelle le jacobien inverse de $\mathbf{F}$

Jacobien inverse d'un robot

Définition

Le jacobien inverse d'un robot permet d'obtenir les vitesses articulaires à partir des vitesses opérationnelles :

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+(q) \begin{pmatrix} {}^0\mathbf{v}_{0n}^{O_n} \\ \boldsymbol{\Omega}_{0n} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Avec $\mathbf{J}^+$ la pseudo-inverse de $\mathbf{J}$: $\mathbf{J}^+ = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T$

Dans le cas particulier où le robot a 6 axes, on a $\mathbf{J}^+ = \mathbf{J}^{-1}$

Remarque : Si l'on veut obtenir les vitesses articulaires à partir des vitesses des paramètres de représentation (par exemple les vitesses des angles d'Euler), il faut inverser également le jacobien du paramétrage

Jacobien inverse d'un robot : singularités (1)

Il existe deux types de singularités :

- Les singularités aux limites de l'espace de travail qui apparaissent lorsque le bras est complètement tendu
- Les singularités à l'intérieur de l'espace de travail qui apparaissent lors de configurations du robot où une infinité de positions articulaires donnent la même attitude de l'organe terminal

Remarque : L'inverse du jacobien de paramétrage admet également des singularités.

Jacobien inverse d'un robot : singularités (2)

La gestion des singularités est impérative afin de prévenir des mouvements erratiques du robot. Une façon simple mais pas optimale pour les gérer est la suivante :

- Pour les singularités en limite de l'espace de travail, on peut imposer des butées logicielles afin d'éviter d'arriver dans des configurations "bras tendu"
- Pour les singularités à l'intérieur de l'espace de travail, si on se rapproche d'une configuration singulière $\mathbf{q}$, on calcule $\mathbf{J}^+(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q})$ au lieu de $\mathbf{J}^+(\mathbf{q})$, avec $\Delta\mathbf{q}$ assez grand pour pouvoir calculer la pseudo-inverse.
- $\hookrightarrow$ Méthode de régularisation de Tikhonov (moindres carrés amorties).

Transmission des efforts

Le vecteur des efforts $\mathbf{F}$ agissant sur l'organe terminal est lié aux efforts τ exercés par les actionneurs de la façon suivante :

$$\tau = {}^0\mathbf{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{F} \quad (35)$$

Remarques

- τ doit tenir compte des pertes par frottements
- La relation précédente est valable à vitesse constante et peut être étendue pour une vitesse nulle

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 Modélisation dynamique
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 **Modélisation dynamique**
 - **Modèle dynamique du robot**
 - Modèle dynamique d'un axe
 - Modèle dynamique du robot + axes

Équations d'Euler-Lagrange (1)

Équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tau_i \quad (36)$$

avec :

- $L = K - V$: le Lagrangien du système
- K : l'énergie cinétique du système
- V : l'énergie potentielle du système
- q_i est la $i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée du système
- τ_i est la force généralisée appliquée au $i^{\text{ème}}$ élément du système

Équations d'Euler-Lagrange (2)

Expression de l'énergie cinétique

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_i + \frac{1}{2} \omega_i^T \mathbf{I}_i \omega_i \quad (37)$$

Avec :

- $\mathbf{I}_i$: matrice d'inertie du corps i exprimée dans un repère lié au corps i et dont l'origine est au centre de gravité du corps i
- ω_i : vitesse angulaire du corps i exprimée dans un repère lié au corps i et dont l'origine est au centre de gravité du corps i
- $\mathbf{v}_i$: vitesse linéaire du centre de gravité du corps i
- m_i : masse du corps i

Équations d'Euler-Lagrange (3)

Expression de $\mathbf{v}_i$ et ω_i

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{J}_{vi}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (38)$$

$$\omega_i = \mathbf{J}_{\omega i}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad (39)$$

où :

- $\mathbf{J}_{vi}$ est le jacobien qui relie la variation de vitesse du centre de gravité du corps i aux vitesses articulaires
- $\mathbf{J}_{\omega i}$ est le jacobien qui relie la variation de vitesse de rotation du corps i aux vitesses articulaires. Ce jacobien doit être exprimé dans le même repère que la matrice d'inertie.

Équations d'Euler-Lagrange (4)

Matrice d'inertie du robot

L'énergie cinétique s'écrit donc :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \sum_{i=1}^n \left(m_i \mathbf{J}_{vi}(\mathbf{q})^T \mathbf{J}_{vi}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}_{\omega i}^T(\mathbf{q}) \mathbf{I}_i \mathbf{J}_{\omega i}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{aligned} \tag{40}$$

La matrice $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ est une matrice symétrique définie positive de dimension $n \times n$ qui dépend de la configuration du robot : elle est appelée la matrice d'inertie du robot

Équations d'Euler-Lagrange (5)

Expression de l'énergie potentielle

$$V = \mathbf{g}^T \sum_{i=1}^n {}^0\mathbf{O}_{\mathbf{g}i} m_i \quad (41)$$

L'énergie cinétique peut s'écrire :

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\dot{\mathbf{q}}) \dot{q}_i \dot{q}_j \end{aligned} \quad (42)$$

L'énergie potentielle ne dépendant que de la configuration, le lagrangien s'écrit alors :

$$L = K - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V(\mathbf{q}) \quad (43)$$

Équations d'Euler-Lagrange (5)

On a : $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j a_{kj}(\mathbf{q}) \dot{q}_j$

Et donc : $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j a_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} a_{kj} \dot{q}_j = \sum_j a_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j$

De même : $\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{\partial V}{\partial q_k}$

Ainsi les équations d'Euler-Lagrange deviennent :

$$\sum_j a_{kj}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial V}{\partial q_k} = \tau_k \quad k = 1, \dots, n \quad (44)$$

Équations d'Euler-Lagrange (6)

En utilisant le fait que :
$$\sum_{i,j} \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

On obtient :

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i,j} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right)$$

On note :

$$c_{ijk} = \left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \text{ et } \phi_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}$$

et on remarque que :

$$c_{ijk} = c_{jik}$$

Expression du modèle dynamique du robot

Au final :

$$\sum_j a_{kj}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{i,j} c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + \phi_k(\mathbf{q}) = \tau_k \quad k = 1 \dots n \quad (45)$$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (46)$$

x_{kj} le (k, j) ^{ème} élément de $\mathbf{C}$ est défini par : $x_{kj} = \sum_i c_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_i$

Les termes impliquant un produit $\dot{q}_i^2$ sont appelés centrifuges et ceux impliquant un produit $\dot{q}_i\dot{q}_j$ sont les termes de Coriolis

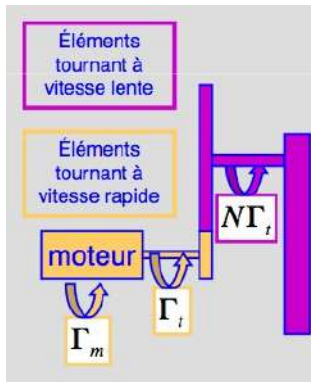
Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 **Modélisation dynamique**
 - Modèle dynamique du robot
 - **Modèle dynamique d'un axe**
 - Modèle dynamique du robot + axes

Modèle dynamique d'un axe

Le modèle dynamique d'un axe :

- La machine à courant continu avec une boucle d'asservissement de courant
- Le réducteur supposé idéal
- Le bras



Modèle avec réducteur idéal (1)

Modélisation du réducteur

$$\dot{q}_s = \frac{1}{N} \dot{q}_m \quad (47)$$

Dynamique de la partie rapide

$$\Gamma_m - \Gamma_t - f_m \dot{q}_m = (J_m + J_{r1}) \ddot{q}_m \quad (48)$$

Dynamique de la partie lente

$$N\Gamma_t - f_s \dot{q}_s = (J_s + J_{r2}) \ddot{q}_s + g(q_s) \quad (49)$$

(47) et (49) :

$$\Gamma_t = \frac{1}{N} \left(f_s \frac{\dot{q}_m}{N} + (J_s + J_{r2}) \frac{\ddot{q}_m}{N} + g(q_s) \right) \quad (50)$$

(50) et (48)

$$\Gamma_m - \left(\frac{f_s}{N^2} + f_m \right) \dot{q}_m - \frac{g(q_s)}{N} = \left(J_m + J_{r1} + \frac{J_s + J_{r2}}{N} \right) \ddot{q}_m \quad (51)$$

Modèle avec réducteur idéal (2)

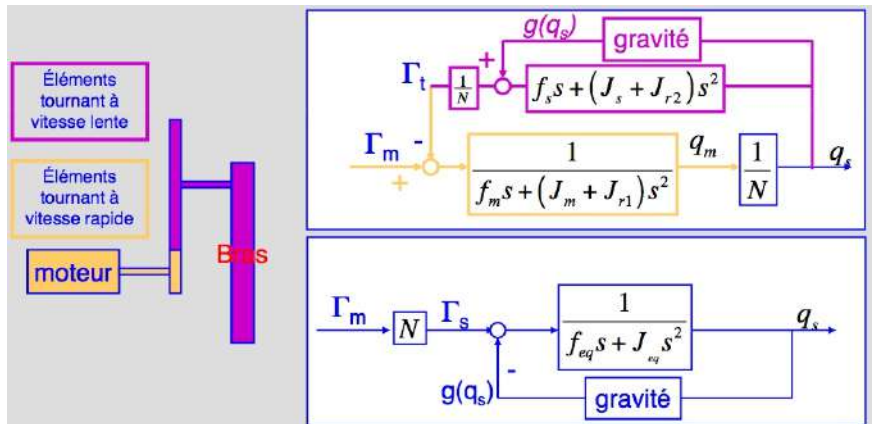
Soit finalement :

$$N\Gamma_m = \underbrace{\left((J_m + J_{r1})N^2 + J_s + J_{r2} \right)}_{J_{eq}} \ddot{q}_s + \underbrace{\left(N^2 f_m + f_s \right)}_{f_{eq}} \dot{q}_s + g(q_s) = J_{eq} \ddot{q}_s + f_{eq} \dot{q}_s + g(q_s) \quad (52)$$

Soit en Laplace :

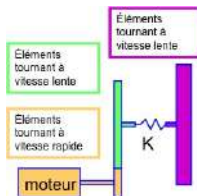
$$q_s = \frac{N\Gamma_m - g(q_s)}{J_{eq}s^2 + f_{eq}s} \quad (53)$$

Modèle avec réducteur idéal (3)



Modélisation des flexibilités (1)

- Bien entendu, aucun des solides constituant le robot n'est infiniment rigide
- Sauf cas très particuliers (robots légers à grand élan pour des applications spécifiques, par exemple le Shuttle Arm, de la navette spatiale américaine), les corps du robot peuvent être supposés infiniment rigides ; les flexibilités sont localisées au niveau des articulations
- La plupart du temps, le modèle est discret : on ajoute des ressorts en série dans la transmission.



Modélisation des flexibilités (2)

Modélisation du réducteur

$$\dot{q}_s = \frac{1}{N} \dot{q}_m \quad (54)$$

Dynamique de la partie rapide

$$\Gamma_m - \Gamma_t - f_m \dot{q}_m = (J_m + J_{r1}) \ddot{q}_m \quad (55)$$

Dynamique de la partie lente après le ressort

$$\Gamma_r - f_s \dot{q}_s = J_s \ddot{q}_s + g(q_s) \quad (56)$$

Dynamique de la partie lente avant le ressort

$$N\Gamma_t - \Gamma_r = J_{r2} \ddot{q}_i \quad (57)$$

Modèle du ressort

$$(56) \text{ et } (58) : \quad \Gamma_r = K(q_i - q_s) \quad (58)$$

$$K(q_i - q_s) = J_s \ddot{q}_s + f_s \dot{q}_s \quad (59)$$

Modélisation des flexibilités (3)

(57) et (58) :

$$N\Gamma_t = \Gamma_r + J_{r2}\ddot{q}_i = K(q_i - q_s) + J_{r2}\ddot{q}_i \quad (60)$$

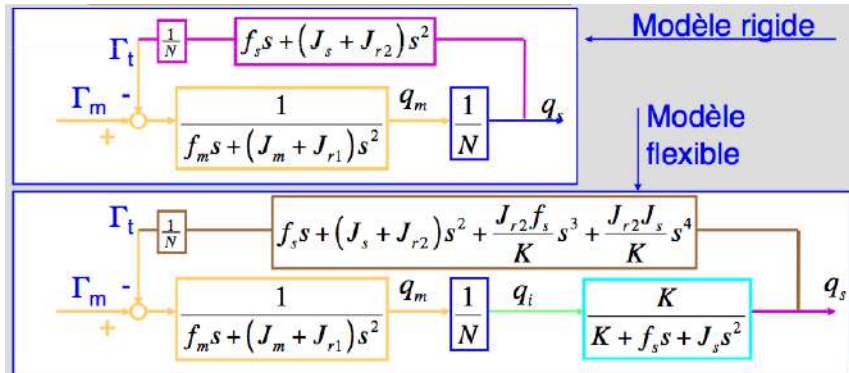
Soit :

$$\frac{q_s}{q_i} = \frac{K}{K + f_s s + J_s s^2} \quad (61)$$

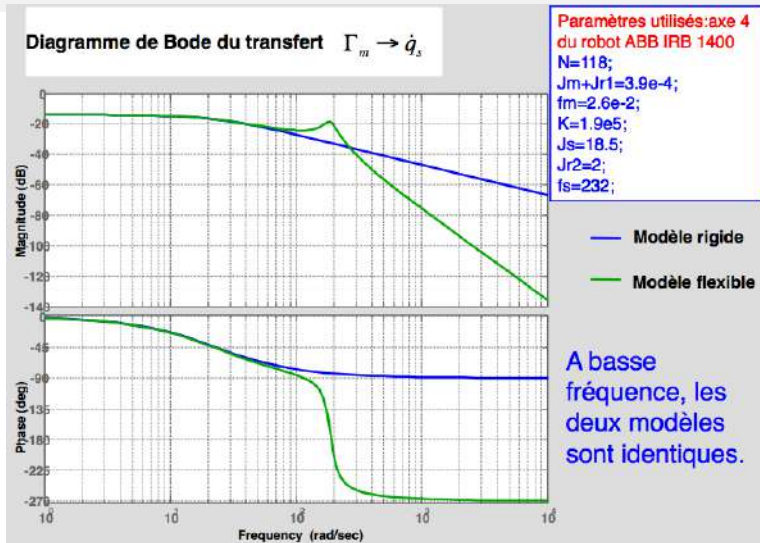
Et :

$$\begin{aligned} N\Gamma_t &= K(q_i - q_s) + J_{r2}s^2 q_i = (K + J_{r2}s^2)q_i - Kq_s \\ &= \left(\frac{(K + J_{r2}s^2)(K + f_s s + J_s s^2)}{K} - K \right) q_s \\ &= \left(f_s s + (J_s + J_{r2})s^2 + \frac{J_{r2}f_s}{K}s^3 + \frac{J_{r2}J_s}{K}s^4 \right) q_s \end{aligned} \quad (62)$$

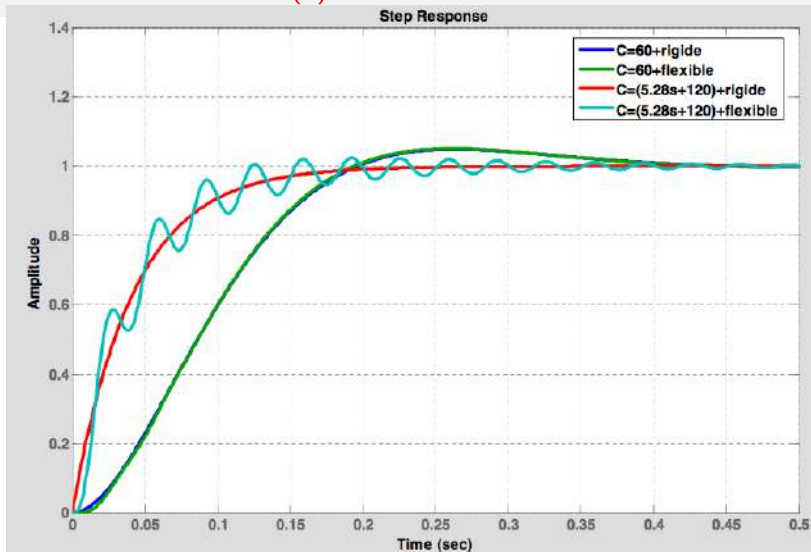
Modélisation des flexibilités (4)



Modélisation des flexibilités (5)



Modélisation des flexibilités (6)



Modélisation des flexibilités (7)

En résumé :

- Un modèle rigide est une approximation du modèle réel, qui n'est vraie qu'à basse fréquence.
- La valeur des premiers modes de vibration (première fréquence de résonance pour chaque axe) est une mesure de qualité d'un robot. Typiquement, de 1 Hz (très mauvais robot) à 20Hz (très bon robot).
- Pour que l'approximation soit valide, il faut que le premier mode naturel du robot soit supérieur à la bande passante de l'asservissement en boucle fermée.
- Dans la suite de ce cours, on retiendra un modèle rigide pour les axes des robots, tout en gardant en mémoire que la bande passante des asservissements de position doit rester assez petite devant les modes flexibles du robot.

Modélisation des frottements secs (1)

- Lorsque le couple transmis Γ_t est faible, aucun mouvement n'est produit : il existe un couple de frottement résistant égal au couple transmis à l'arrêt (couple de frottements secs Γ_{fs}).
- Lorsque le couple moteur est suffisant, l'axe est en mouvement, mais le couple résistant ne vérifie pas strictement la loi linéaire : $\Gamma_f = f_f \dot{q}$

Modèle de Coulomb

- Si $\Gamma_t < \Gamma_0$ alors $\dot{q} = 0$ et $\Gamma_{fs} = \Gamma_t$
- Sinon $\Gamma_{fs} = \Gamma_0$

On écrit parfois ce modèle sous la forme : $\Gamma_{fs} = \Gamma_0 \text{sgn}(\dot{q})$ mais cela ne traduit pas bien la valeur du frottement lorsque l'axe est "collé"

Modélisation des frottements secs (2)

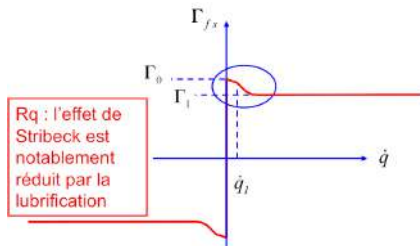
Effet de Stribeck

Le modèle de Coulomb : $\Gamma_{fs} = \Gamma_0 \text{sgn}(\dot{q})$ ne permet pas de traduire la diminution des frottements en fonction de la vitesse à basse vitesse (effet dit de Stribeck).

Modèle plus réaliste : le couple résistant Γ_1 à haute vitesse est inférieur au couple de décollement Γ_0

Aux basses vitesses, la courbe a une pente négative. Ce phénomène, à l'origine du stick-slip (broutement) rend difficile le contrôle du mouvement à basse vitesse.

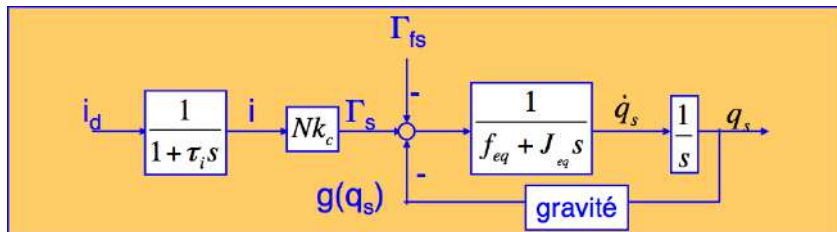
Un modèle possible est : $\Gamma_{fs} = \left(\Gamma_1 + \frac{\Gamma_0 - \Gamma_1}{1 + \frac{\dot{q}^2}{\dot{q}_l^2}} \text{sgn}(\dot{q}) \right)$



Modèle retenu pour la suite

$$N\Gamma_m = (N^2(J_m + J_{r1}) + J_s + J_{r2})\ddot{q}_s + (f_s + N^2f_m)\dot{q}_s + \Gamma_{fs} + g(q_s) \quad (63)$$

où : $\Gamma_m = k_c i_m$



Rappel du plan

- 1 Organisation et contenu de l'UE
 - Emploi du temps
 - Fonctionnement et contrôle des connaissances
 - Contenu de l'UE
- 2 Modélisation géométrique
 - Notions de base
 - Modèle géométrique direct
 - Paramétrage opérationnel
 - Convention de Denavit-Hartenberg (DH)
 - Modèle géométrique inverse
- 3 Modélisation cinématique
 - Composition des vitesses
 - Modèle cinématique direct
 - Modèle cinématique inverse
- 4 **Modélisation dynamique**
 - Modèle dynamique du robot
 - Modèle dynamique d'un axe
 - **Modèle dynamique du robot + axes**

Intégration de la dynamique d'actionnement (1)

- On suppose que les transmissions sont infiniment rigides
- Dans la plupart des cas, les actionneurs sont montés en série : l'actionneur i est placé entre le corps $i-1$ et le corps i :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1 \dots N\} \quad \Gamma_i = N_i \Gamma_{mi} &\Rightarrow \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{W} \mathbf{\Gamma}_m \text{ avec } \mathbf{W} = \text{Diag}(N_i) \\ \forall i \in \{1 \dots N\} \quad \dot{q}_i = \frac{1}{N_i} \dot{q}_{mi} &\Rightarrow \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_m \end{aligned} \quad (64)$$

- Remarque : puissance en entrée = $\mathbf{\Gamma}_m^T \dot{\mathbf{q}}_m$, puissance en sortie = $\mathbf{\Gamma}^T \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma}_m^T \mathbf{W}^T \mathbf{W}^{-1} \dot{\mathbf{q}}_m = \mathbf{\Gamma}_m^T \dot{\mathbf{q}}_m$ car $\mathbf{W}$ est diagonale

Intégration de la dynamique d'actionnement (2)

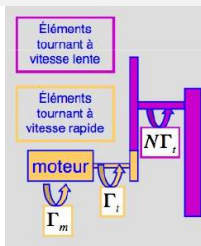
- Dans le cas général, à partir des relations cinématiques entre vitesses des moteurs et vitesses relatives des axes, on définira W par :

$$\dot{\mathbf{q}}_m = \mathbf{W}\dot{\mathbf{q}} \quad (65)$$

- Et la relation sur les couples est établie à partir du principe des puissances virtuelles :

$$\forall \mathbf{\Gamma}_m, \forall \dot{\mathbf{q}}_m, \mathbf{\Gamma}_m^T \dot{\mathbf{q}}_m = \mathbf{\Gamma}_m^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Gamma}^T \dot{\mathbf{q}} \iff \mathbf{\Gamma}^T = \mathbf{\Gamma}_m^T \mathbf{W} \iff \mathbf{\Gamma} = \mathbf{W}^T \mathbf{\Gamma}_m \quad (66)$$

Intégration de la dynamique d'actionnement (3)



Dynamique de la partie rapide

$$\Gamma_m - \Gamma_t - F_m \dot{q}_m = (J_m + J_r) \ddot{q}_m \quad (67)$$

Dynamique de la partie lente

$$W^T \Gamma_t - F_s \dot{q} - \Gamma_{fs} - J_{r2} \ddot{q} = A(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + g(q) \quad (68)$$

Actionneurs

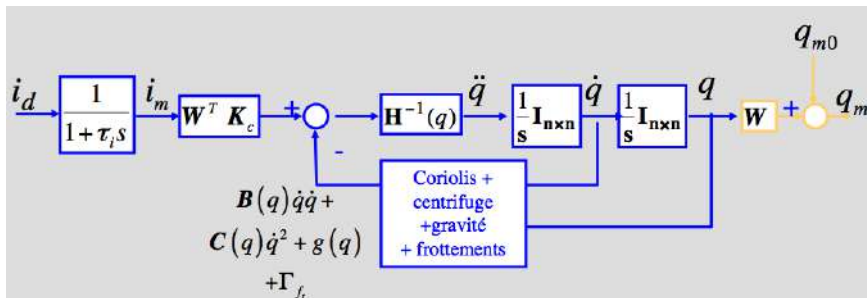
$$\Gamma_m = K_c i_m \quad (69)$$

Modèle complet

$$H(q) \ddot{q} = W^T K_c i_m - C(q, \dot{q}) \dot{q} - g(q) - \Gamma_{ft} \text{ avec :} \quad (70)$$

$$\begin{cases} H(q) = A(q) + W^T (J_m + J_{r1}) W + J_{r2} \\ \Gamma_{ft} = (W^T F_m W + F_s) \dot{q} + \Gamma_{fs} \end{cases} \quad (71)$$

Modèle complet



Bibliographie

- ① J. Gangloff. Robotique de manipulation. Cours de l'École Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg
[http ://eavr.u-strasbg.fr/wiki/index.php/Robotique_de_manipulation](http://eavr.u-strasbg.fr/wiki/index.php/Robotique_de_manipulation)
- ② G. Morel. Commande en robotique de modélisation. Ancien cours de master de robotique à Paris 6.

Commande des Systèmes Robotiques - NSR13

Modélisation

Support de cours réalisé en collaboration avec Wael BACHTA

Vincent PADOIS

`vincent.padois@upmc.fr`

Université Pierre et Marie Curie
Institut des Systèmes Intelligents et de Robotique (CNRS UMR 7222)

