

Gestion du risque : La diversification.

Objectifs : Recherche d'heuristiques pour la gestion de portefeuilles.

Simulations de portefeuille :

1. Quels sont les paramètres à prendre en compte pour constituer un portefeuille ?
2. On suppose un portefeuille constitué d'une action (action A) de rentabilité moyenne 10% et de volatilité 7% et d'une obligation de rentabilité moyenne 5% et de risque nul. Représenter graphiquement les différents portefeuilles possibles.
3. On considère un portefeuille constitué de deux actions ; l'action précédente et une action (action B) de rentabilité moyenne 17% et de volatilité 12%. Représenter graphiquement les différents portefeuilles possibles en fonction de la corrélation entre les deux titres. Quel est l'effet de la diversification ?
4. Même question en ajoutant au portefeuille précédent l'obligation de la question 2.
5. Même question en remplaçant l'obligation précédente par une action de rentabilité moyenne 15% et de volatilité 10%.
6. Gestion du Bêta ; déterminer le bêta du portefeuille en fonction des proportions de titres en faisant différentes hypothèses sur les bêtas individuels des titres du type : « Si le titre le plus risqué a un bêta fort alors ... » ou « si il a un bêta faible ... »
7. Formalisation du problème et recherche d'extremum.
8. Simulation de la valeur d'un portefeuille.
9. On modélise souvent l'utilité d'un portefeuille par $U = E(R) - 0,5A\sigma_p^2$. Etudier selon les valeurs de A , l'évolution de l'utilité en fonction de la proportion de titres A (pour les questions 2 et 3). Que représente ce coefficient A ? Déterminer la composition maximisant l'utilité d'un portefeuille à deux titres.

Effet de la diversification : Démonstration et représentation graphique à l'aide d'Excel.

On considère un portefeuille de N actifs équipondérés ayant une volatilité identique et une même corrélation deux à deux.

1. Donner l'expression de la variance du portefeuille.
2. Dédurre de cette expression qu'il existe une limite à la diversification. Donner la volatilité du portefeuille le plus diversifié.
3. Proposer une mesure de sensibilité à l'ajout d'un titre. Montrer que la diminution du risque lié à l'ajout d'un titre s'amointrit à mesure que le nombre N de titres déjà présents est grand.
4. Pour une volatilité de 1 et une corrélation de 0,25, vérifier que la volatilité du portefeuille le plus risqué est moitié moindre que celui contenant un seul actif. Combien faut-il de titres pour que la diversification atteigne 75% de son efficacité maximale en terme de volatilité (même question pour une corrélation de 0,05) ?

Mesure de risque :

Vous envisagez d'acheter deux actifs A et B. Leurs volatilités respectives sont de 3% et 4%. Vous ne disposez pas de la corrélation entre les deux titres. Vous allez donc étudier l'impact de la corrélation en procédant à des simulations en faisant varier le coefficient de corrélation de -1 à 1.

Simuler la VaR du portefeuille en fonction de la proportion de titres A et de la corrélation entre les titres.

Problématique : Maximiser la rentabilité tout en minimisant les risques.

I] Pour deux titres :

Notons R_A et R_B , les variables aléatoires représentatives des rentabilités des titres A et B.

On suppose connu $E(R_A), E(R_B), \sigma_A, \sigma_B$ et ρ_{AB} .

La proportion (en valeur) de titres A dans le portefeuille est p . La rentabilité du portefeuille est ainsi $R_p = pR_A + (1-p)R_B$.

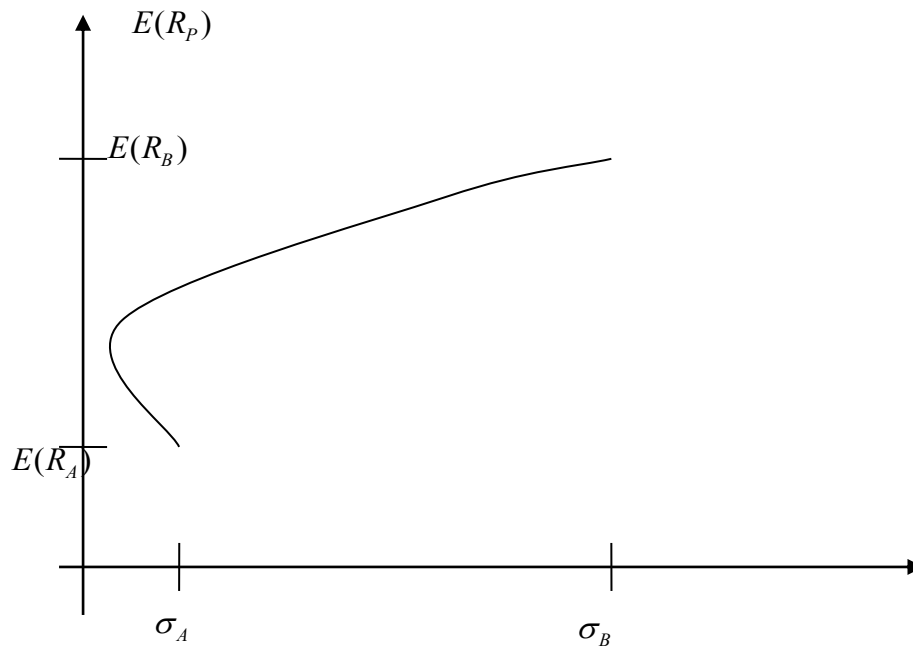
On en déduit ainsi que la rentabilité moyenne du portefeuille est

$$E(R_p) = pE(R_A) + (1-p)E(R_B)$$

La risque du portefeuille est mesuré par sa volatilité exprimée par la relation :

$$\sigma_p^2 = p^2\sigma_A^2 + (1-p)^2\sigma_B^2 + 2p(1-p)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}$$

La **frontière d'efficience** de Markowitz est la représentation de la rentabilité en fonction du risque de l'ensemble des portefeuilles :



Problème 1 : Déterminer la composition du portefeuille permettant un risque minimal .

Méthode : Dérivation de la variance du portefeuille par rapport à p.

$$\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial p} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB}}$$

Cas particuliers : Corrélation parfaite positive : $p = 100\%$

$$\text{Corrélation nulle : } p = \frac{\sigma_B^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$$

$$\text{Corrélation parfaite négative : } p = \frac{\sigma_B}{\sigma_A + \sigma_B}$$

Problème 2 : Maximiser la rentabilité

Solution : 100% du titre le plus rentable.

Problème 3 : Minimiser le risque tout en assurant une rentabilité minimale de t%

$$\text{Méthode : résolution de } pE(R_A) + (1-p)E(R_B) = t\% \text{ soit } p = \frac{E(R_B) - t\%}{E(R_B) - E(R_A)}$$

Problème 4 : Maximiser la rentabilité tout en assurant un risque maximal de t%

$$\text{Méthode : résolution de } \sigma_p^2 = p^2\sigma_A^2 + (1-p)^2\sigma_B^2 + 2p(1-p)\sigma_A\sigma_B\rho_{AB} = t\%^2$$

$$\text{Soit } (\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB})p^2 + 2(-\sigma_B^2 + \sigma_A\sigma_B\rho_{AB})p + \sigma_B^2 - t\%^2 = 0$$

$$\text{Ainsi } p = \frac{4(\sigma_B^2 - \sigma_A\sigma_B\rho_{AB}) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\sigma_A\sigma_B\rho_{AB})}$$

III] Pour plusieurs titres :

La rentabilité moyenne d'un portefeuille est donnée par

$$E(R_p) = p_1 E(R_1) + p_2 E(R_2) + \dots + p_n E(R_n) \text{ avec } p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Le risque est donné par l'expression : $\sigma_p^2 = \sum_{k=1}^n p_k^2 \sigma_k^2 + 2 \sum_{i < j} p_i p_j \sigma_i^2 \sigma_j^2 \rho_{ij}$

La méthode pour minimiser le risque (sans contraintes) est la résolution d'un système

d'équations donné par $\frac{\partial \sigma_p^2}{\partial p_k}$.

La minimisation du risque avec contraintes de rentabilité est donnée par la méthode d'optimisation sous contraintes (Théorème de Lagrange) de fonctions à plusieurs variables.