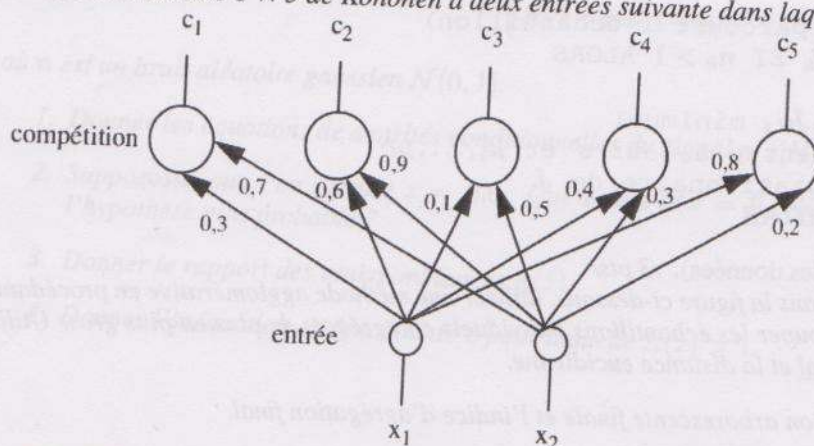


Exercice 1 (Carte topologique de Kohonen). /6 pts/

Soit la carte linéaire 1×5 de Kohonen à deux entrées suivante dans laquelle les c_m sont des neurones :



La similarité entre la forme $X = [x_1 x_2]$ et le vecteur de poids du neurone $c_m, m = 1, \dots, 5$ est mesurée par la distance euclidienne au carré D_m . Le neurone gagnant sera donc celui dont la distance euclidienne au carré avec le vecteur d'entrée sera la plus faible. Les paramètres du réseau sont :

$$X = [0.50.2], \quad \eta = 0.2 \quad D_m^2 = \|w_m - X\|^2 = (w_{m1} - x_1)^2 + (w_{m2} - x_2)^2$$

où $W_m = (w_{m1} w_{m2})^T$ est le vecteur de poids du neurone c_m et η le paramètre d'apprentissage qui décroît avec les itérations.

1. Déterminez le neurone c_m^* dont le vecteur de poids W_m^* est le plus près du vecteur d'entrée $X = [0.50.2]$,
2. Calculez le nouveau vecteur de poids W_m^* en utilisant une constante d'apprentissage $\eta = 0.2$
3. Si les neurones voisins c_{m-1}^* et c_{m+1}^* peuvent aussi participer à l'apprentissage, trouvez leur nouveau vecteur de poids W_{m-1}^* et W_{m+1}^* .
4. représenter graphiquement ce qui s'est passé.

Exercice 2 (Programmation). /5 pts/

Considérons une classification K approximative donnée sur $\mathbb{R}^d$ d'un ensemble de points $x_1, x_2, \dots, x_n$ provenant d'un échantillon S donné. Notons $\bar{x}$ la moyenne globale et J l'indice du regroupement à minimiser.

$$J = \sum_{k=1}^C J_k, \quad J_k = \sum_{x \in P_k} \|x - \mu_k\|^2$$

avec $P_k = \{x_i \in S | K(x_i) = k\}$ une partition opérée par l'opérateur d'affectation $K(\cdot)$, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne, μ_k la moyenne de la classe k . Le nombre d'éléments dans la classe k est n_k ($n_k = |P_k|$). Supposons que ôter x_i dans P_k et l'ajouter à $P_{k'}$ se traduise mathématiquement par la variation de J_k , lorsque la classe P_k est diminuée d'un échantillon x_i :

$$\Delta J_{k,i} = \frac{n_k}{n_k - 1} \|x_i - \mu_k\|^2.$$

Nous donnons ci-dessous un algorithme permettant de réaliser cette classification.

On part d'une partition $P_1, \dots, P_C$ arbitraire;

Calculer J et $\mu_1, \dots, \mu_C$

REPETER

POUR i de 1 à n (on parcourt l'échantillon)

SI x_i appartient à P_k ET $n_k > 1$ ALORS

ôter x_i de P_k et

déterminer k' avec $\Delta J_{k',i}$ minimum;

ajouter x_i à $P_{k'}$ et mettre à jour J et $\mu_1, \dots, \mu_C$

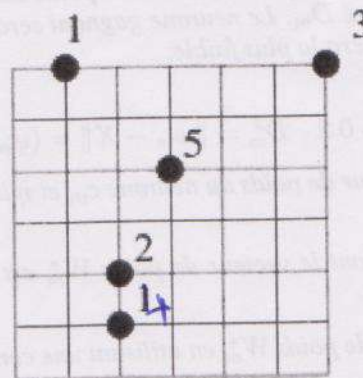
JUSQU'À une valeur stationnaire de J

Ecrivez cet algorithme en MATLAB.

Exercice 3 (Représentation des données). /3 pts/

A partir de la grille donnée dans la figure ci-dessous, utiliser une méthode agglomérative en procédant dans le sens ascendant, pour regrouper les échantillons individuels en agrégats de plus en plus gros. Utiliser la stratégie du diamètre maximal et la distance euclidienne.

- Donner la représentation arborescente finale et l'indice d'agrégation final.
- A partir de cette représentation arborescente, donner la composition des 3 classes obtenues.



Exercice 4 (maximum de vraisemblance). /3 pts/

Supposons que n échantillons $x_1, \dots, x_n$ sont tirés indépendamment selon une distribution de Erlang dont la fonction de densité est la suivante :

$$p(x|\theta) = \theta^2 x e^{-\theta x}.$$

Trouver l'estimation du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ en maximisant la vraisemblance des mesures par rapport à θ :

$$\ell(x_1, \dots, x_n|\theta) = \prod_{i=1}^n \theta^2 x_i e^{-\theta x_i}$$

Exercice 5 (Classification bayésienne). /4pts/

On suppose qu'un capteur peut recevoir 2 types de signaux z possibles, qui forment 2 hypothèses :

$$\begin{cases} H_1 : z = n \\ H_2 : z = 1 + n \end{cases}$$

où n est un bruit aléatoire gaussien $\mathcal{N}(0, 1)$.

1. Donner les équations de densités conditionnelles du signal $p(z|H_1)$ et $p(z|H_2)$.
2. Supposons que l'on mesure $z = 0.6$. Que valent $p(z = 0.6|H_1)$ et $p(z = 0.6|H_2)$? Quelle est l'hypothèse plus probable ?
3. Donner le rapport des vraisemblances $\Lambda(z)$.
4. Donner l'inéquation en fonction de z pour laquelle $\Lambda(z) > 1$.