

Informatique pour la finance

Sacha Kozlov
(green.fr@gmail.com)

EFREI
2011

Plan de cours

- Cours d'initiation aux concepts de la finance
- Taux d'intérêt
- Actualisation / Capitalisation
- Emprunt indivis
- Les obligations
- La courbe des taux

Plan de cours

- Cours d'initiation aux concepts de la finance
- Taux d'intérêt
- Actualisation / Capitalisation
- Emprunt indivis
- Les obligations
- La courbe des taux

Initiation à la finance

- Pragmatisme
 - Les simplifications nécessaires
 - Il y a toujours des contre-exemples
- Intuition

Plan de cours

- Cours d'initiation aux concepts de la finance
- **Taux d'intérêt**
- Actualisation / Capitalisation
- Emprunt indivis
- Les obligations
- La courbe des taux

Taux d'intérêt

- Placement
- Pourquoi une rémunération ?
- Taux période
- Taux simple, taux composé
- Taux équivalent, taux continu

Placement

- Placer l'argent sur un période déterminé
 - Somme placée – V_0
 - Durée de placement – T
- Opération est rémunérée
 - Somme récupérée – V_T
 - Taux d'intérêt – r_T

$$V_T = V_0(1 + r_T)$$

Pourquoi une rémunération ?

- 1€ aujourd'hui $\neq$ 1€ demain
 - Inflation (pas vraiment une réponse)
 - Abandon de la liberté d'utiliser son argent
 - Prise en compte des risques :
 - De perdre son argent ;
 - De ne pas pouvoir vendre au moment désiré ;
 - Etc...

Taux période

- Application du taux sur le période adapté

$$V_T = V_0(1 + r_T)$$

- Adaptation du taux pour d'autres périodes

- Taux simple

$$V_{nT} = V_0(1 + nr_T)$$

- Taux composé

$$V_{nT} = V_0(1 + r_T)^n$$

- Unité commune de mesure – taux annuel

Taux simple v.s. taux composé

- La différence – capitalisation des intérêts
 - Intérêts simples – des intérêts non capitalisés :

$$V_{2T} = V_0 + 2V_0 r_T = V_0 + V_0 r_T + V_0 r_T$$

- Intérêts composés – des intérêts capitalisés :

$$V_{2T} = V_0 (1 + r_T)^2 = V_0 + V_0 r_T + V_T r_T$$

Taux d'intérêt dans la réalité

- Taux simple – durées inférieurs à 1 an
- Date de versement de la rémunération :
 - À terme échu (postcompté)
 - À terme à échoir (précompté)
- Date de valeur – quinzaine des banques
- Calcul de la durée :
 - Exact, sur 360/365 jours, en mois, en semaines...
- Taux commercial...

Taux équivalent

- Taux nominal – r pour une période d'un an
- L'année est divisée en k périodes
- Taux appliqué à chaque période – r/k
- Taux composé
- Taux équivalent :
$$r_e^{(k)} = \left(1 + \frac{r}{k}\right)^k - 1$$

- Taux continu :
$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_e^{(k)} = e^r - 1$$

Plan de cours

- Cours d'initiation aux concepts de la finance
- Taux d'intérêt
- **Actualisation / Capitalisation**
- Emprunt indivis
- Les obligations
- La courbe des taux

Actualisation

- Valeur actuelle
- Actualisation et capitalisation
- Annuités
- Taux de rendement actuarielle
- Cas des annuités constantes

Valeur actuelle

- Valeur actuelle (*present value*) – V_0 en date 0
- Avec taux r donne V_n en n années
- Date de départ commune pour les flux futurs

Actualisation et capitalisation

- Actualisation :

$$V_0 = \frac{V_n}{(1+r)^n}$$

- Capitalisation est inverse à l'actualisation :

$$V_n = V_0 (1+r)^n$$

- La même utilisation : mettre les montants sur une base commune de comparaison

Séquence des flux et annuités

- Annuité – versement périodique
 - Souvent annuel, mais pas obligatoirement
 - Synonymes en fonction du contexte :
 - « arrérage » dans les rentes ;
 - « coupon » dans les obligations, etc. ;
- Chaque flux j est défini par :
 - Son montant F_j
 - Sa date de versement t_j

Exercice : des annuités constantes

- Séquence des flux :
 - Du montant identique – a
 - Des dates équidistantes (flux annuels)
 - Premier flux à la date $t = 1$
- Le taux d'actualisation r
- Donner l'expression pour la valeur actuelle d'une telle séquence de n flux
 - VA d'une séquence des flux = somme des VA des flux
- Idem pour une séquence infinie

Solution d'exercice

- En mettant

$$v = \frac{1}{1+r}$$

- En utilisant les propriétés de la progression géométrique :

$$V_0 = \sum_{j=1}^n \frac{a}{(1+r)^j} = a \sum_{j=1}^n v^j = av \frac{1-v^n}{1-v}$$

- Pour une rente perpétuelle :

$$V_0 = \frac{av}{1-v} = \frac{a}{r}$$

Taux de rendement actuariel (TRI)

- Séquence finie des flux – F_j, t_j
- Valeur actuelle :
$$V_0 = \sum_j \frac{F_j}{(1+r)^{t_j}}$$
- Taux d'intérêt qui annule la valeur actuelle
- Solution existante et unique si le signe du premier flux est différent des signes des autres
- Applicable aux certaines séquences infinies

Exercice : TRI simple

- Soit le premier flux de -120€ à la date 0
- Suivi par 9 flux annuels de 15€
- Soit le taux d'actualisation de 4%
- Calculer la valeur actuelle de la séquence
- Calculer le TRI

Exercice : TRI général

- Soient les flux suivants :

Date	0	1	2	3	5	6	7	8	9
Flux	-100€	10€	30€	10€	-100€	20€	50€	50€	50€

- Soit le taux d'actualisation de 4%
- Calculer la valeur actuelle de cette séquence
- Calculer le TRI

Plan de cours

- Cours d'initiation aux concepts de la finance
- Taux d'intérêt
- Actualisation / Capitalisation
- **Emprunt indivis**
- Les obligations
- La courbe des taux

Emprunt indivis

- Définition d'un emprunt indivis
- Tableau d'amortissement
- Différentes schémas de remboursement :
 - Zéro coupon
 - In fine
 - Par annuités constantes

Emprunt indivis

- Emprunt auprès d'un seul prêteur
- Montant prêté – S_0
- Taux d'intérêt – i
- Remboursements ... périodiques $F_0 \dots F_n$
 - Différentes schémas de remboursement possibles

Remboursement zéro coupon

- Une seule annuité à la fin d'emprunt

$$S_n = S_0(1+i)^n$$

- Exercice : démontrer que TRI = i

Correction de l'exercice

- L'actualisation du flux aux taux r donne :

$$\sum_{j \in \{0, n\}} \frac{F_j}{(1+r)^j} = -S_0 + \frac{S_0(1+i)^n}{(1+r)^n} = 0$$

$$(1+i)^n = (1+r)^n \Rightarrow i = r$$

Remboursement in fine

- Chaque annuité sauf la dernière ne rembourse que les intérêts de la période passée
- La dernière annuité rembourse le capital en plus

$$F_j = \begin{cases} -S_0 & j=0 \\ S_0 i & 0 < j < n \\ S_0(1+i) & j=n \end{cases}$$

- Exercice : démontrer que $TRI = i$

Correction de l'exercice

- L'actualisation des flux aux taux r donne :

$$\sum_{j=0}^n \frac{F_j}{(1+r)^j} = -S_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{S_0 i}{(1+r)^j} + \frac{S_0(1+i)}{(1+r)^n} = 0$$

$$-S_0 + S_0 i \sum_{j=1}^{n-1} v^j + S_0(1+i)v^n = -S_0 + S_0 i \sum_{j=1}^n v^j + S_0 v^n = 0$$

$$-1 + iv \frac{1-v^n}{1-v} + v^n = 0 \Rightarrow iv \frac{1-v^n}{1-v} = 1 - v^n \Rightarrow i = \frac{1-v}{v} = r$$

Tableau d'amortissement

- Représentation visuelle d'emprunt :
 - Date de situation
 - Montant d'annuité
 - Dont les intérêts depuis la dernière situation
 - Dont le remboursement du capital
 - Capital restant dû

Exercice : tableau d'amortissement

- Capital emprunté : 1000€
- Taux d'intérêt : 4%
- Durée d'emprunt : 10 ans
- Différé de paiement : 3 ans
- Périodicité des annuités : annuelle
 - Première annuité (dans 4 ans) : 50€
 - Les annuités augmentent de 50€ chaque année
 - Calculer la dernière annuité

Rbt par des annuités constantes

- Chaque annuité – a – est composé de :
 - Remboursement des intérêts
 - Remboursement d'une partie de capital

$$F_j = a = \underbrace{S_{j-1}i}_{\text{intérêts}} + \underbrace{m_j}_{\text{rbt. capital}}$$

- Exercice 1 : trouver la formule pour a
- Exercice 2 : démontrer que $\text{TRI} = i$