

Corrigé

Problème 1 :

- 1) Dans ce modèle, le numéraire est le titre $i = 0$ et le taux sans risque r vaut 5%.
- 2) Avec le portefeuille $\theta = (1, 2, 2)$, le titre est atteignable puisque :

$$(11.05, 13.05, 15.05, 15.05) = (1, 2, 2) \times \begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- 3) Pour trouver un vecteur de prix d'états, il suffit de résoudre le système $S_1\pi = S_0$, où π est un vecteur à quatre composantes. Puisque ce système admet 4 inconnues et seulement 3 équations, on prend une de ces inconnues comme paramètre, par exemple π_4 . On obtient le système :

$$\begin{pmatrix} 1.05 & 1.05 & 1.05 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \pi_4 \begin{pmatrix} 1.05 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Si on appelle M la matrice qui se trouve dans le membre de gauche de cette équation, l'inverse de M est :

$$M^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 16/1.05 & -2 & -3 \\ 3/1.05 & -1 & 1 \\ -14/1.05 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} &= M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - \pi_4 M^{-1} \begin{pmatrix} 1.05 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16/5.25 - 3 \\ 3/5.25 \\ -14/5.25 + 3 \end{pmatrix} - \pi_4 \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.048 + 0.4\pi_4 \\ 0.571 - 0.8\pi_4 \\ 0.333 - 0.6\pi_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour tout $\pi_4 \in]0, 0.555[$, le vecteur π trouvé a toutes ses composantes positives. Par conséquent, de telles solutions sont des vecteurs de prix d'état tous positifs.

- 4) Puisqu'il existe un vecteur de prix d'états tous positifs, il n'y a pas de possibilités d'arbitrage dans ce modèle.
- 5) Puisqu'il existe un vecteur de prix d'états tous positifs, il existe une distribution risque neutre. Cette distribution vérifie :

$$S_0 = \frac{1}{1+r} S_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+r} M \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{1+r} q_4 \begin{pmatrix} 1.05 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} &= (1+r)M^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} - q_4 M^{-1} \begin{pmatrix} 1.05 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16/5 - 3.15 \\ 3/5 \\ -14/5 + 3.15 \end{pmatrix} - q_4 \begin{pmatrix} -2/5 \\ 4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} \\ &\approx \begin{pmatrix} 0.05 + 0.4q_4 \\ 0.6 - 0.8q_4 \\ 0.35 - 0.6q_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En prenant $q_4 = 0.1$, on obtient $q_1 = 0.09$, $q_2 = 0.52$ et $q_3 = 0.29$.

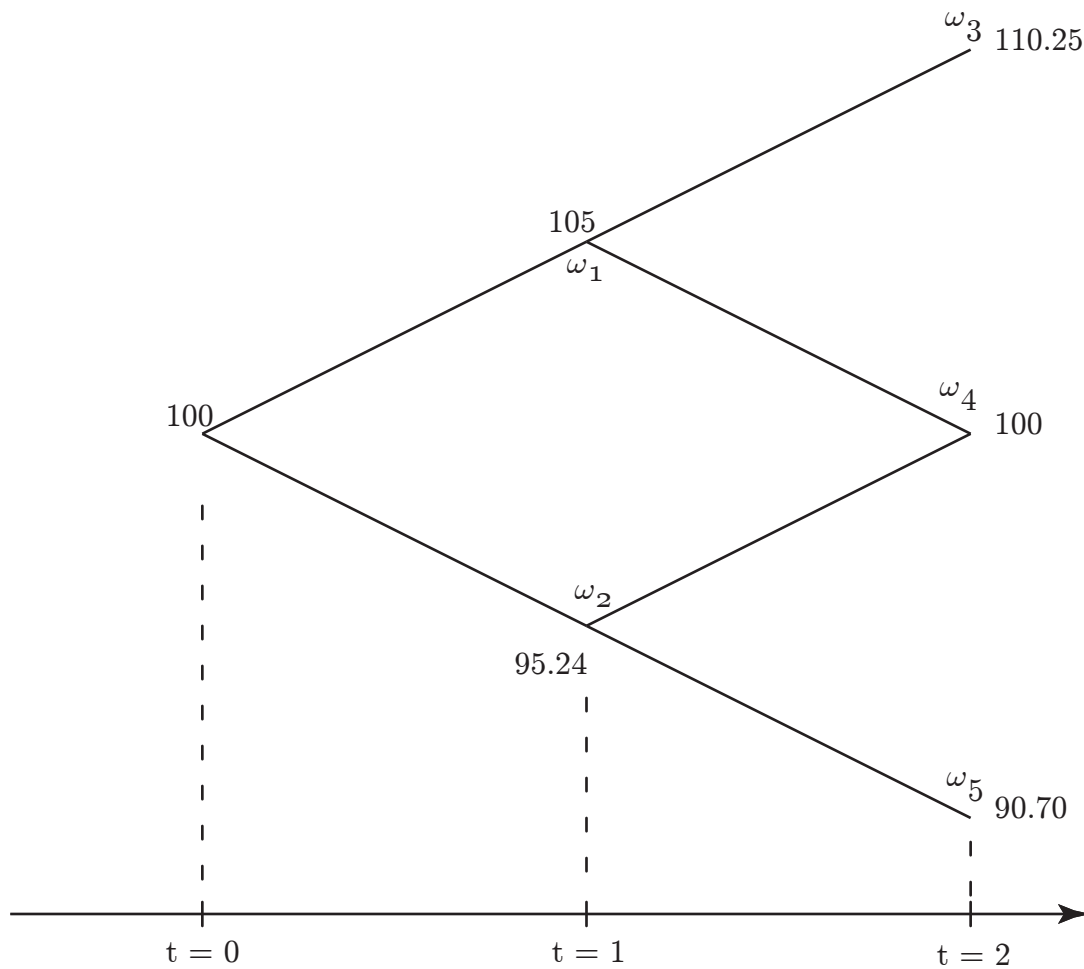
- 6) Le juste prix du titre au temps $t = 0$ est obtenu à l'aide de la distribution risque-neutre :

$$P = \frac{1}{1.05} (0.09 \times 11.05 + 0.52 \times 13.05 + 0.29 \times 15.05 + 0.1 \times 15.05) = 13.$$

Le prix proposé est donc le bon prix !

Problème 2 :

- 1) Le paramètre d est le taux de variation du prix de l'actif dans le cas d'une baisse. Ici $d = 1/u \approx 0.952$. La distribution risque neutre est constituée de deux probabilités : q_1 qui est la probabilité d'une augmentation de l'actif et q_2 qui est la probabilité d'une diminution de l'actif. Ici $q_1 = (1+r-d)/(u-d) \approx 0.795$ et $q_2 = 1 - q_1 \approx 0.205$.
- 2) Si le taux sans risque vaut 6%, on a $1+r \geq u$. Dans ce cas, il y a des possibilités d'arbitrage dans ce marché.
- 3) Les valeurs de l'actif au temps $t = 0, 1, 2$ sont donnés dans l'arbre ci-dessous :



- 4) Le bénéfice à l'exercice d'une option d'achat européenne est donné par la formule $C = \max(S - K, 0)$ où S est la valeur du sous-jacent à la maturité et K le strike. On a donc ici $C = 5.25$ dans l'état ω_3 et $C = 0$ dans les états ω_4 et ω_5 .
- 5) On obtient le juste prix de l'option récursivement en utilisant la formule de la martingale sur une période :

$$\begin{aligned} C(\omega_1) &= q_1 C(\omega_3) + q_2 C(\omega_4) = 4.174 \\ C(\omega_2) &= q_1 C(\omega_4) + q_2 C(\omega_5) = 0 \\ C_0 &= q_1 C(\omega_1) + q_2 C(\omega_2) = 3.318 \end{aligned}$$

Le juste prix de cette option est donc 3.318.

- 6) Avec cette option de vente, les bénéfices obtenus si l'exercice intervient en date $T = 2$ sont $C(\omega_3) = C(\omega_4) = 0$ si pour les états ω_3 et ω_4 et $C(\omega_5) = 9.30$ pour l'état ω_5 . En date $t = 1$, et dans l'état ω_1 , le bénéfice est de 0 qu'on exerce l'option ou pas et la valeur de l'option dans cet état est donc de $C(\omega_1) = 0$. A cette même date mais dans l'état ω_2 , le bénéfice est de 4.76 si on exerce l'option

et de :

$$q_1 C(\omega_4) + q_2 C(\omega_5) \approx 1.91,$$

si on attend. La valeur de l'option dans cet état est donc $C(\omega_2) = 4.76$. Enfin en date $t = 0$, la valeur de l'option est :

$$q_1 C(\omega_1) + q_2 C(\omega_2) \approx 0.98.$$

Problème 3 :

- 1) Un mouvement Brownien Standard est un processus stochastique X_t tel que :
 - i. $X_0 = 0$,
 - ii. Le temps t est continu,
 - iii. La variable aléatoire $X_t - X_s$ suit une loi normale de moyenne 0 et d'écart type $t - s$.
- 2) Il est supposé dans le modèle de Black-Scholes que le prix du sous-jacent est un mouvement Brownien géométrique.
- 3) Les quatre prix simulés produisent les bénéfices suivants à l'exercice :

$$15, 25, 0, 0.$$

La moyenne de ces quatre valeurs est $\theta_4 = 10$. La valeur de l'option est donc cette moyenne, actualisée :

$$C = \frac{\theta_4}{(1+r)^{100}} = \frac{10}{(1.02)^{100}} \approx 1.38.$$

- 4) L'écart type des 4 valeurs données à la question 3) est :

$$s = \sqrt{\frac{(15-10)^2 + (25-10)^2 + 2 \times (0-10)^2}{3}} \approx 12.247$$

Puisque le niveau de confiance vaut 95%, alors $Z = 1.96$ et les bornes de l'intervalle de confiance sont :

$$l = -1.96 \frac{12.247}{\sqrt{4}} \approx -2 \text{ et } u = 10 + 1.96 \frac{12.247}{\sqrt{4}} \approx 22.$$

- 5) Ici $\varepsilon = 4$ et $Z = 1.96$. Il faut effectuer $Z^2 s^2 / \varepsilon^2 = 36.01$ soit $n = 37$ simulations sont nécessaires pour obtenir une erreur absolue d'au plus 4 au niveau de confiance de 95%. D'autre part, si $\theta_4 = 10$ et $\varepsilon = 0.04$, il faut effectuer $Z^2 s^2 / (\varepsilon^2 \theta_4^2) = 3601.23$ soit $n = 3602$ simulations pour obtenir une erreur relative d'au plus 4 au niveau de confiance de 95%.