

Sans documents

Pour chaque question, veuillez préciser les formules que vous utilisez, les raisonnements que vous faites, ainsi que vos calculs intermédiaires !

Problème 1 : On considère un marché constitué de trois titres indicés par $i = 0, 1, 2$. Ce marché est décrit par un modèle sur une période avec quatre états possibles à la date $t = 1$ notés $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 . Le prix en euros des trois titres est donné par les vecteurs suivants :

- Au temps $t=0$, $S_0 = [1, 3, 3]$,
- Au temps $t=1$ et dans l'état ω_1 , $S_1(\omega_1) = [1.05, 4, 1]$,
- Au temps $t=1$ et dans l'état ω_2 , $S_1(\omega_2) = [1.05, 2, 4]$,
- Au temps $t=1$ et dans l'état ω_3 , $S_1(\omega_3) = [1.05, 5, 2]$,
- Au temps $t=1$ et dans l'état ω_4 , $S_1(\omega_4) = [1.05, 3, 4]$.

- 1) Dans ce modèle, quel est le numéraire et quel est le taux sans risque r ?
- 2) Il vous est proposé d'acheter un titre dont la valeur au temps $t = 1$ est :
 - 11.05 € si ω_1 se réalise,
 - 13.05 € si ω_2 se réalise,
 - 15.05 € si ω_3 ou si ω_4 se réalise,

Est-ce que ce titre est atteignable ? Si il l'est donnez le portefeuille équivalent.

- 3) On suppose que l'hypothèse de pricing linéaire est satisfaite. Est-ce qu'il existe un vecteur de prix d'état tous positifs pour ce marché ? Si oui, donnez un vecteur de prix d'état tous positifs.
- 4) Existe-t-il une possibilité d'arbitrage dans ce marché ? Pourquoi ?
- 5) Existe-t-il une distribution risque neutre pour ce marché ? Si oui, calculez une telle distribution.
- 6) On considère le titre décrit à la question 2). Ce titre vous est proposé au prix de 13 €. Est-ce le bon prix ? Pourquoi ?

Problème 2 :

On considère un modèle binomial du cours d'un actif risqué avec $u = 1.05$ et $T = 2$. On suppose que le taux d'intérêt sans risque r vaut 3%.

- 1) Que valent d , q_1 et q_2 . Veuillez donner la formules et la signification de chacune de ces quantités,

- 2) Si le taux sans risque était de 6%, quelle serait la conséquence pour le marché modélisé ?
- 3) On suppose dans la suite que l'actif risqué s'échange pour 100 € au temps $t = 0$. Donnez les valeurs de cet actif pour $t = 1, 2$ et dans tous les états prévus par ce modèle. *Indication : vous tracerez un arbre.*
- 4) Donnez les bénéfices à l'exercice d'une option d'achat européenne sur l'actif risqué modélisé, de maturité $T = 2$, de strike $K = 105$ €.
- 5) Donnez le juste prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat décrite à la question 4).
- 6) Quel est le juste prix au temps $t = 0$ de l'option de vente américaine sur le même actif risqué, de maturité $T = 2$ et de strike $K = 100$ €.

Problème 3 :

- 1) Qu'est-ce qu'un mouvement Brownien Standard ?
- 2) Quelle est l'hypothèse principale du modèle de Black-Scholes ?
- 3) On suppose que les quantités suivantes sont les valeurs du prix d'une action en date T , obtenues par simulation dans la méthode de Monte-Carlo :

125, 135, 95, 100.

Si cette action suit un modèle binomial avec $T = 100$, donnez une estimation selon la méthode de Monte-Carlo de la valeur d'une option d'achat européenne sur cette action de strike $K = 110$. On suppose ici que le taux d'intérêt sans risque est indépendant du temps et vaut $r = 0.02$?

- 4) Quel est l'intervalle de confiance au niveau de 95% pour l'estimation trouvée à la question 4) ?
- 5) En supposant que les valeurs données à la question 3) sont utilisées comme première phase d'une méthode à deux phases, combien de simulations sont nécessaires pour obtenir une erreur absolue d'au plus 4 au niveau de confiance de 95% ? Combien de simulations sont nécessaires pour obtenir une erreur relative d'au plus 4% au niveau de confiance de 95% ?