

Corrigé

Problème 1 :

- 1) Une option d'achat européenne est un contrat passé en date $t = 0$ qui donne à son acquéreur le droit d'acheter un titre (appelé sous-jacent) à une date $T > 0$ (appelée maturité) pour un prix K (appelé prix d'exercice) convenu en date $t = 0$. Une option de vente européenne est un contrat passé en date $t = 0$ qui donne à son acquéreur le droit de vendre un titre (appelé sous-jacent) à une date $T > 0$ (appelée maturité) pour un prix K (appelé prix d'exercice) convenu en date $t = 0$.
- 2) Une option d'achat américaine est un contrat passé en date $t = 0$ qui donne à son acquéreur le droit d'acheter un titre (appelé sous-jacent) à n'importe quel moment entre la date $t = 0$ et une date $T > 0$ (appelée maturité) pour un prix K (appelé prix d'exercice) convenu en date $t = 0$. Une option de vente américaine est un contrat passé en date $t = 0$ qui donne à son acquéreur le droit de vendre un titre (appelé sous-jacent) à n'importe quel moment entre la date $t = 0$ et une date $T > 0$ (appelée maturité) pour un prix K (appelé prix d'exercice) convenu en date $t = 0$.
- 3) Une option d'achat asiatique est un contrat passé en date $t = 0$ qui produit en date $T > 0$ (appelée maturité) un bénéfice égal à :

$$\max \left(\frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T S_t - K, 0 \right),$$

où S_t est la valeur en date t d'un titre (appelé sous-jacent) et K est le prix d'exercice de l'option fixé en date $t = 0$. Une option de vente asiatique est un contrat passé en date $t = 0$ qui produit en date $T > 0$ (appelée maturité) un bénéfice égal à :

$$\max \left(K - \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T S_t, 0 \right),$$

où S_t est la valeur en date t d'un titre (appelé sous-jacent) et K est le prix d'exercice de l'option fixé en date $t = 0$.

- 4) L'option la moins risqué est l'option asiatique puisque son bénéfice est calculé avec la moyenne des prix du sous-jacent sur la période $[0, T]$ et non pas seulement avec la valeur du sous-jacent à la date d'exercice.

Problème 2 :

On considère un modèle binomial du cours d'un actif risqué avec $u = 1.05$ et $T = 2$.

- 1) Si la matrice S_1 est inversible alors le marché sera complet.
- 2) Avec le portefeuille $\theta = (2, 1, 1)$, le titre est atteignable puisque :

$$(8.18, 7.18, 8.18) = (2, 1, 1) \times \begin{pmatrix} 1.09 & 1.09 & 1.09 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- 3) Pour trouver un vecteur de prix d'états, il suffit de résoudre le système $S_1\pi = S_0$. L'inverse de S_1 est :

$$S_1^{-1} = \begin{pmatrix} -13/1.09 & 3 & 2 \\ 6/1.09 & -1 & -1 \\ 8/1.09 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = S_1^{-1}S_0 = \begin{pmatrix} 12 - 13/1.09 \\ -5 + 6/1.09 \\ -7 + 8/1.09 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.073 \\ 0.505 \\ 0.339 \end{pmatrix}$$

La seule solution de ce système est un vecteur dont les composantes sont toutes positives. Par conséquent, cette solution est un vecteur de prix d'état tous positifs.

- 4) Un arbitrage de type A est un investissement tel qu'un bénéfice positif est produit immédiatement au temps $t = 0$ et dont le coût au temps $t = 1$ est nul. Un arbitrage de type B est un investissement dont le coût au temps $t = 0$ est non-positif, et tel que la probabilité d'obtenir un bénéfice positif au temps $t=1$ est non-nulle et la probabilité d'obtenir un bénéfice négatif au temps $t = 1$ est nulle.
- 5) Puisqu'il existe un vecteur de prix d'états tous positifs, il n'y a pas de possibilités d'arbitrage dans ce modèle.
- 6) Puisqu'il existe un vecteur de prix d'états tous positifs, il existe une distribution risque neutre. Cette distribution vérifie :

$$S_0 = \frac{1}{1+r} S_1 \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = (1+r)S_1^{-1}S_0 = (1+r)\pi = \begin{pmatrix} 1.09 \times 12 - 13 \\ -1.09 \times 5 + 6 \\ -1.09 \times 7 + 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.08 \\ 0.55 \\ 0.37 \end{pmatrix}.$$

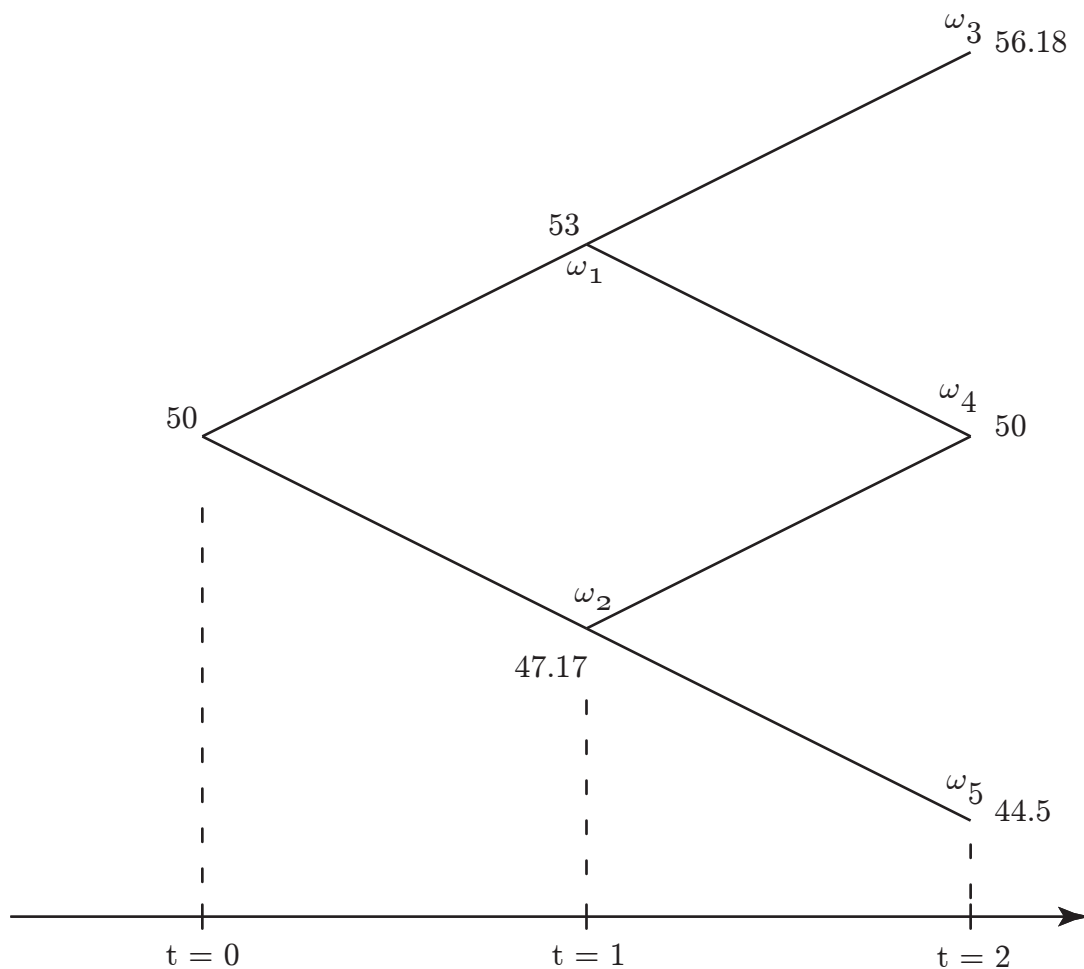
- 7) Le juste prix du titre au temps $t = 0$ est obtenu à l'aide de la distribution risque-neutre :

$$P = \frac{1}{1 + 0.09}(0.08 \times 8.18 + 0.55 \times 7.18 + 0.37 \times 8.18) = 7.63.$$

Le prix proposé est donc sous-estimé de 0.63 euros trop cher !

Problème 3 :

- 1) Le paramètre d est le taux de variation du prix de l'actif dans le cas d'une baisse. Ici $d = 1/u \approx 0.943$. La distribution risque neutre est constituée de deux probabilités : q_1 qui est la probabilité d'une augmentation de l'actif et q_2 qui est la probabilité d'une diminution de l'actif. Ici $q_1 = (1 + r - d)/(u - d) \approx 0.657$ et $q_2 = 1 - q_1 \approx 0.343$.
- 2) Le marché est complet si $d < 1 + r < u$.
- 3) Les valeurs de l'actif au temps $t = 0, 1, 2$ sont donnés dans l'arbre ci-dessous :



- 4) Le bénéfice à l'exercice d'une option d'achat européenne est donné par la formule $C = \max(S - K, 0)$ où S est la valeur du sous-jacent à la maturité et K le strike. On a donc ici $C = 1.18$ dans l'état ω_3 et $C = 0$ dans les états ω_4 et

ω_5 .

- 5) On obtient le juste prix de l'option récursivement en utilisant la formule de la martingale sur une période :

$$C(\omega_1) = q_1 C(\omega_3) + q_2 C(\omega_4) = 0.775$$

$$C(\omega_2) = q_1 C(\omega_4) + q_2 C(\omega_5) = 0$$

$$C_0 = q_1 C(\omega_1) + q_2 C(\omega_2) = 0.509$$

Le juste prix de cette option est donc 0.509.

Problème 4 :

- 1) Ici $\varepsilon = 1$ et $Z = 1.96$. Il faut effectuer $Z^2 s^2 / \varepsilon^2 = 553.19$ soit $n = 554$ simulations.
- 2) Ici $\theta_{50} = 105$, $\varepsilon = 0.01$ et $Z = 1.96$. Il faut effectuer $Z^2 s^2 / (\varepsilon^2 \theta_{50}^2) = 501.76$ soit $n = 502$ simulations.
- 3) Ici le niveau de confiance est 95% donc $Z = 1.96$. Les bornes de l'intervalle sont donc :

$$l = 102 - 1.96 \frac{14}{\sqrt{1000}} = 101.1333 \text{ et } l = 102 + 1.96 \frac{14}{\sqrt{1000}} = 102.8677.$$