

Sans documents

Pour chaque question, veuillez préciser les formules que vous utilisez, les raisonnements que vous faites, ainsi que vos calculs intermédiaires !

Problème 1 :

- 1) Donnez la définition d'une option européenne d'achat et de vente.
- 2) Donnez la définition d'une option américaine d'achat et de vente.
- 3) Donnez la définition d'une option asiatique d'achat et de vente.
- 4) Quelle est la moins risquée de ces trois types d'options ? Pourquoi ?

Problème 2 : On considère un marché constitué de trois titres indicés par $i = 0, 1, 2$. Ce marché est décrit par un modèle sur une période avec trois états possibles à la date $t = 1$ notés ω_1, ω_2 et ω_3 . Au temps $t = 0$, le prix en euros des trois titres est donné par le vecteur $S_0 = [1, 2, 3]$ et au temps $t = 1$, le prix de ces trois titres est donné par la matrice suivante dont les colonnes correspondent aux états :

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1.09 & 1.09 & 1.09 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

On suppose que le numéraire est le titre $i = 0$.

- 1) Comment peut-on vérifier que le marché est complet en utilisant la matrice S_1 ?
- 2) Il vous est proposé d'acheter un titre dont la valeur au temps $t = 1$ est :
 - 8.18 € si ω_1 se réalise,
 - 7.18 € si ω_2 se réalise,
 - 8.18 € si ω_3 se réalise,Est-ce que ce titre est atteignable ? Pourquoi ? Si ce titre est atteignable, donnez le portefeuille équivalent.
- 3) On suppose que l'hypothèse de pricing linéaire est satisfaite. Est-ce qu'il existe un vecteur de prix d'état tous positifs pour ce marché ?
- 4) Qu'est-ce qu'une possibilité d'arbitrage ?
- 5) Existe-t-il une possibilité d'arbitrage dans ce marché ? Pourquoi ? Si il y a une possibilité d'arbitrage, donnez un portefeuille d'arbitrage.
- 6) Existe-t-il une distribution risque neutre pour ce marché ? Si oui, calculez cette distribution.

- 7) On considère le titre décrit à la question 2). Ce titre vous est proposé au prix de 7 €. Est-ce le bon prix ? Pourquoi ?

Problème 3 :

On considère un modèle binomial du cours d'un actif risqué avec $u = 1.06$ et $T = 2$. On suppose que le taux sans risque r vaut 2%.

- 1) Que valent d , q_1 et q_2 . Veuillez donner la formules et la signification de chacune de ces quantités,
- 2) Pour quelle valeur du taux sans risque r est-ce que le marché est complet ?
- 3) On suppose dans la suite que l'actif risqué s'échange pour 50 € au temps $t = 0$. Donnez les valeurs de cet actif pour $t = 1, 2$ et dans tous les états prévus par ce modèle. *Indication : vous tracerez un arbre.*
- 4) Donnez les bénéfices à l'exercice d'une option d'achat européenne sur l'actif risqué modélisé, de maturité $T = 2$, de strike $K = 55$ €.
- 5) Donnez le juste prix au temps $t = 0$ de l'option d'achat décrite à la question 4).

Problème 4 :

- 1) Dans une simulation de Monte Carlo pour évaluer le prix d'une action, la première phase de la méthode à deux phases, effectuée avec $p = 50$ tirages donne $\theta_{50} = 105$ et $s = 12$. Combien faut-il effectuer de simulations dans la deuxième phase pour obtenir une erreur absolue inférieure à 1 avec un niveau de confiance de 95% ?
- 2) Combien faut-il effectuer de simulations dans la deuxième phase pour obtenir une erreur relative inférieure à 1% avec un niveau de confiance de 95% ?
- 3) On suppose qu'après avoir effectué la deuxième phase avec $n = 1000$ simulations, on calcule le prix d'une option sur le sous-jacent simulé. obtient l'estimation suivante pour le prix de cette option : $\theta_n = 102$ et $s = 14$. Quel est l'intervalle de confiance au niveau de 95% pour l'estimation trouvée à la question 3) ?