

Introduction à Matlab

<http://perso.efrei.fr/~pournin/TP1.pdf>

Système linéaire

$$Ax = b$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n$$

Matrice augmentée

$$A|b$$

ou

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{nm} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

Matrice échelonnée réduite

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ | & 0 & 0 & 1 & * & 0 & 0 \\ | & | & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ | & | & | & | & | & | & 1 \\ | & | & | & | & | & | & | \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Définition :

Une matrice est échelonnée si elle a les propriétés suivantes :

- (1) Dans toute ligne non-nulle, le premier élément non-nul est un 1 (1 directeur)
- (2) Les lignes nulles sont regroupées en bas de la matrice

(3) Pour deux lignes successives, le 1 directeur de la deuxième est à droite du 1 directeur de la première ligne

Permet de savoir si un marché est complet

Pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss consiste à transformer la matrice augmentée d'un système linéaire en une matrice échelonnée réduite en utilisant les opérations (élémentaires) suivantes :

- (i) Echanger deux lignes
- (ii) Multiplier par une constante non-nulle
- (iii) Ajouter le multiple d'une ligne à une autre ligne

Ex :

$$x + y + 7z = -1$$

$$2x - y + 5z = -5$$

$$-x - 3y - 9z = -5$$

Matrice augmentée (on enlève les x, y, z, les + et les =) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & -5 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Résolution :

$$L2 \leftarrow L2 - 2L1 :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & -9 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L3 \leftarrow L3 + L1 :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & -3 & -9 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}$$

$$L2 \leftarrow L2 / -3 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}$$

$$L1 \leftarrow L1 - L2 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}$$

$$L3 \leftarrow L3 - 2L2 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}$$

$$L3 \leftarrow L3 / 4 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$L2 \leftarrow L2 - 3L3 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$L1 \leftarrow L1 - 4L3 :$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{array} \right.$$

Un système d'équations linéaires de n lignes et m colonnes (n×m) peut avoir :

- (i) Une unique solution (dans ce cas, $n=m$ et $\text{rang}(A)=n$. Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace des x tels que $Ax = 0$)
- (ii) Aucune solution (dans ce cas, la matrice échelonnée réduite comporte une ligne dont tous les éléments sont nuls, sauf le dernier. Ex : $0 \ 0 \ \dots \ 0 \ b$ avec $b \neq 0$. La traduction de cette ligne est $0 = b$. Comme $b \neq 0$, il n'y a pas de solution)
- (iii) Une infinité de solutions. C'est alors un sous-espace affine de $\mathbb{R}^m$ (l'espace des vecteurs colonne à m composantes).

Ex :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x + 2y + 3t &= 4 \\ z + 2t &= 5 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Dans ce cas, les colonnes qui ne contiennent pas de 1 directeur seront des paramètres : ici, y et t sont donc des paramètres.

On obtient :

$$\begin{aligned} x &= 4 - 2y - 3t \\ z &= 5 - 2t \end{aligned}$$

Les solutions du système sont donc :

$$\begin{array}{lclclcl} x & 4 - 2y - 3t & & 4 & -2 & -3 \\ y & = y & = & 0 & + y & + t \\ z & 5 - 2t & & 5 & 0 & -2 \\ t & t & & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Algo Pivot de Gauss

1. Trouver la première colonne non nulle

```
j = 1
while (colonne est nulle)
    j = j + 1
end
```

$\Leftrightarrow \text{while (sum(A(:,j)) \sim 0) == size(A,1) }$

Conditions sur une matrice :

```
A = 0      3      3
     1      0      2
A ~ = 0      ⇔      0      1      1
                   1      0      1
```

Matrice A nulle :

```
sum(A~=0) = nb élément de A
sum(A==0) = 0
```

function R = recurse (A)

```
j = 1
while ( sum(A(:,j)) ~ = 0 )
    j = j + 1
end
```

A la fin de la boucle, j est le
numéro de la première
colonne non nulle

```
i = 1
while (A(i,j) == 0)
    i = i + 1;
end
```

A la fin de la boucle, i est la
première ligne du vecteur
A(:,j) telle que A(i,j) ≠ 0

```
tmp = A(1,:);
A(1,:) = A(i,:);
A(i,:) = tmp;
```

Echange des lignes 1 et i

```
A(1,:) = A(1,:) / A(1,j)
for i = 2 : size(A,1)
    A(i,:) = A(i,:) - A(i,j) × A(1,:);
end
```

Pivotage de la colonne j

```
A(2 : size(A,1) , j+1 : size(A,2) ) = recurse (A(2 : size(A,1), j+1 : size(A,2)) )
```

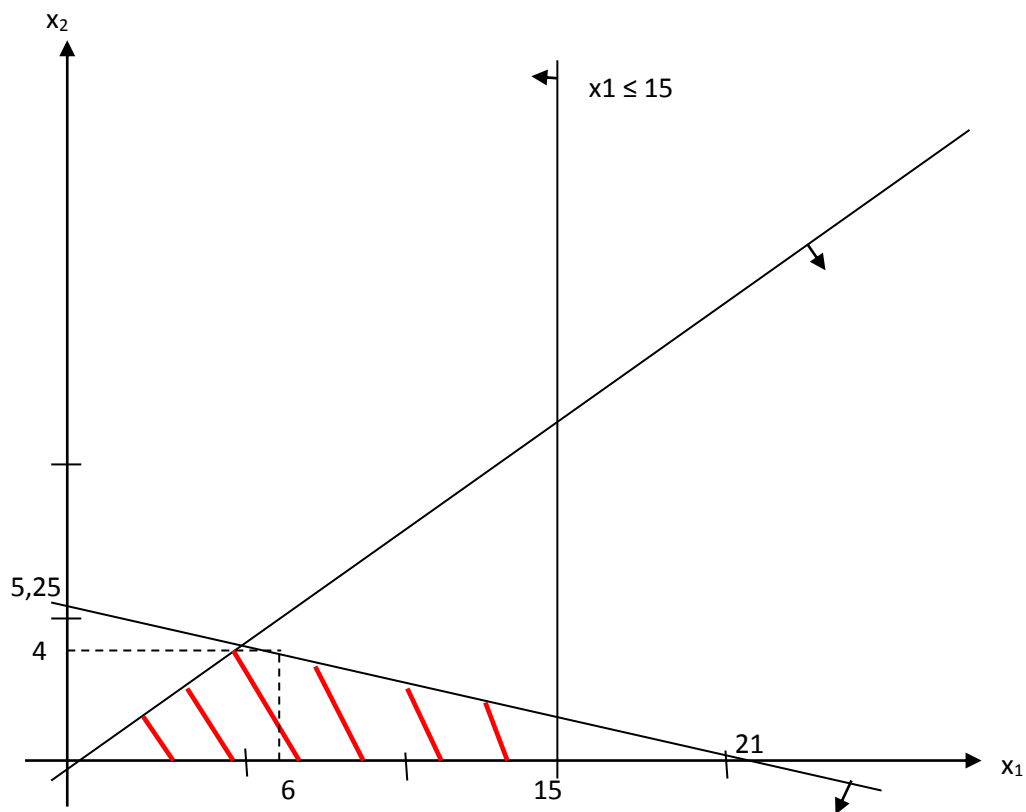
Attention, il faut implémenter la condition de sortie.

R = A ;

Systèmes d'inéquations

Exemple :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 21 \\ -4x_1 + 6x_2 \leq 0 \\ x_1 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$



$$\text{Max } z = 50\,000 x_1 + 200\,000 x_2$$

(sous contraintes)

$$\begin{array}{llllll} \text{s.c} & x_1 & + & 4x_2 & \leq & 21 \\ & -4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & \leq & 15 \\ & x_1 & , & x_2 & \leq & 0 \end{array}$$

En 3D : surface rouge = tétraèdre.

Algorithme du simplexe :

x1	x2	x3	x4	x5	
1	1	1	0	0	21
-4	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	15
-50 000	-200 000	0	0	0	0

Pivotages : on va choisir un pivot, càd choisir un élément de la matrice

Choix de la colonne : on choisit la colonne la plus à gauche, qui a un terme strictement négatif dans sa dernière ligne → colonne 1

Choix de la ligne : on choisit une ligne dont le quotient caractéristique est le plus petit (les q.c ne sont calculés que pour les termes positifs). → ligne 3

Pivot : -4

x1	x2	x3	x4	x5	
0	4	1	0	-1	6
0	6	0	1	4	60
1	0	0	0	1	15
0	-200 000	0	0	50 000	750 000

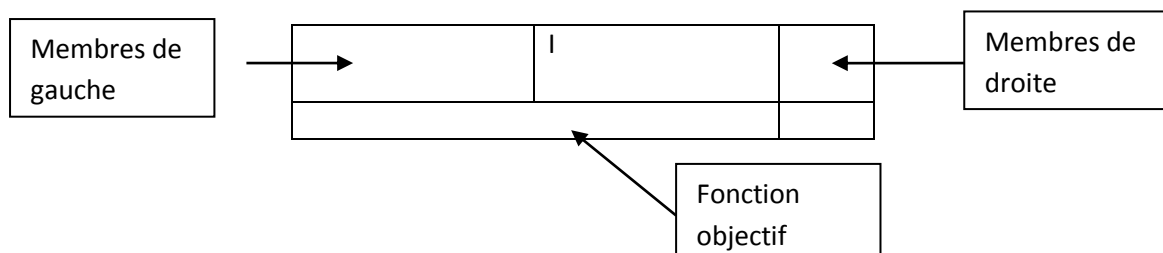
q.c : 6/4 10 -

Pivot : 4

x1	x2	x3	x4	x5	
0	1	1/4	0	-1/4	3/2
0	0	-3/2	1	11/2	51
1	0	0	0	1	15
0	0	50 000	0	0	1 050 000

Ne résout que les systèmes d'inéquations dans lesquelles « ≤ ».

Algorithme du simplexe :



$$\begin{array}{ll} \text{Max } c^T \times x \\ \text{s.c} & Ax \leq v \\ & x \geq 0 \end{array}$$



T =

A	I	b
- c ^T	0	0

Où c^T est un vecteur ligne à n composantes, A est une matrice de n lignes et de m colonnes et b est un vecteur colonne de n lignes à coefficients non-négatifs.

Pivotages :

- 1) Choisir une colonne : la colonne la plus à gauche avec un terme < 0 en dernière ligne (s'il n'y a pas une telle colonne, l'algorithme est terminé)
 $\Rightarrow$ Colonne j
- 2) Choisir une ligne : pour chaque ligne i, calculer b_i/a_{ij} si $a_{ij} > 0$. La ligne du pivot sera une ligne dans laquelle ce rapport est minimal. Si $a_{ij} \leq 0$ pour tout i, alors le problème n'a pas de solution.
 $\Rightarrow$ Colonne i
- 3) On élimine dans la colonne j tous les termes qui ne sont pas en ligne i. Il suffit pour cela de soustraire (un certain nombre de fois) la ligne i aux autres lignes. Au préalable, on divise la ligne i par a_{ij} pour faire apparaître 1.

Function res = simplexe (A,b,c)

Construire T

While ()

end