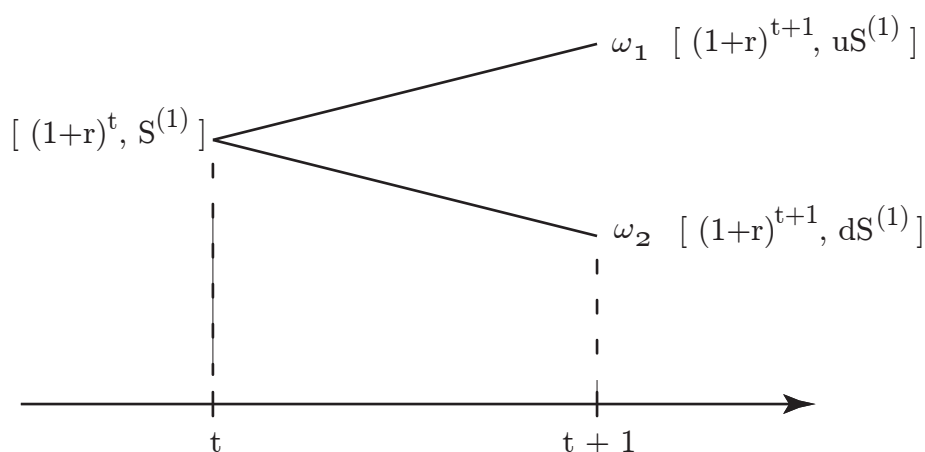


Travail Pratique n° 2 : Un premier « priceur »

L'objectif de ce TP est de programmer un priceur d'option sur un modèle simple de sous-jacent. On supposera donc que le marché est constitué d'un numéraire de taux sans risque r et d'un actif risqué. Ce modèle évolue d'une date $t = 0$ à une date $t = T$. D'autre part, à chaque date t et dans chaque état ω_j , le monde peut évoluer de deux manières à la date suivante : la valeur de l'actif risqué augmente, ou bien elle baisse. Cette variation de la valeur de l'actif risqué est modélisée par deux paramètres : $u > 1$ et $d < 1$. Ainsi, si $S^{(1)}$ est la valeur de l'actif risqué en date t , cette valeur sera égale à $uS^{(1)}$ en date $t + 1$ dans le cas d'une hausse et à $dS^{(1)}$ dans le cas d'une baisse. Attention, contrairement au modèle binominal, d n'est pas ici égal à $1/u$. Le modèle peut donc être décomposé comme une succession de modèles sur une période comme celui-ci :



- 1) A la date t , combien y a-t-il d'états possibles dans ce modèle ?
- 2) Montrez qu'il existe une distribution de probabilités risque-neutre dans le modèle élémentaire sur une période ci-dessus si et seulement si $d < 1 + r < u$.

Dans les questions qui suivent, on cherche à trouver le prix au temps 0 d'une option d'achat ou de vente dont le sous-jacent est l'actif risqué, de prix d'exercice K et de maturité T .

- 3) On suppose d'abord que $T = 1$. En utilisant Matlab, écrivez une fonction qui prend comme paramètres r , u , d , K et le prix S de l'actif risqué en date $t = 0$ et qui renvoie la valeur au temps $t = 0$ d'une option d'achat européenne.
- 4) On suppose que le taux sans risque est $r = 0.03$. Donnez la valeur d'une option d'achat européenne de prix d'exercice 95 et de maturité $T = 1$ sur un sous-jacent de valeur $S = 100$ en $t = 0$, dont les variations sont modélisées avec $u = 1.05$ et $d = 0.95$.
- 5) Dans cette question, T n'est pas nécessairement égal à 1. En utilisant la question précédente, écrivez une fonction récursive qui prend comme paramètres r , u , d , K , t , T et le prix S de l'actif risqué en date $t < T$ et qui renvoie la valeur au temps t d'une option européenne.
- 6) On suppose que le taux sans risque est $r = 0.02$. Donnez la valeur d'une option d'achat européenne de prix d'exercice 95 et de maturité $T = 3$ sur un sous-jacent de valeur $S = 100$ en $t = 0$, dont les variations sont modélisées avec $u = 1.05$ et $d = 0.95$.
- 7) En reprenant les mêmes paramètres qu'à la question 6), mais avec un taux sans risque de $r = 0.04$, quel serait la valeur en $t = 0$ de la même option européenne ? Comment expliquez-vous cette différence ?
- 8) Ecrivez une nouvelle fonction récursive qui permet de trouver la valeur d'une option de vente européenne.
- 9) On suppose que le taux sans risque est $r = 0.02$. Donnez la valeur d'une option de vente européenne de prix d'exercice 105 et de maturité $T = 3$ sur un sous-jacent de valeur $S = 100$ en $t = 0$, dont les variations sont modélisées avec $u = 1.05$ et $d = 0.95$.
- 10) Donnez la valeur de la même option de vente qu'à la question précédente mais avec $T = 10$, $T = 20$, puis $T = 30$. Que constatez-vous ?
- 11) On considère maintenant des options américaines. Quelle est la particularité de ce genre d'option par rapport aux options européennes ? Comment cela se traduit-il sur le calcul de la valeur de l'option en un temps t donné ?
- 12) Ecrivez une nouvelle fonction récursive qui permet de trouver la valeur d'une

option de d'achat américaine.

- 13) On suppose que le taux sans risque est $r = 0.006$. Donnez la valeur d'une option d'achat américaine de prix d'exercice 110 et de maturité $T = 3$ sur un sous-jacent de valeur $S = 100$ en $t = 0$, dont les variations sont modélisées avec $u = 1.05$ et $d = 0.95$.
- 14) Comment faut-il modifier cette procédure pour obtenir un priceur dans le cas d'une option de vente américaine ?
- 15) Si maintenant $d = 1/u$, comment est-ce que la procédure de calcul que vous avez développé peut-elle être améliorée ?